

Физика

Семестр I



Кафедра «Физика»

Лекционный курс

Авторы

Мардасова И.В.

Шкиль Т.В.

Аннотация

Лекционный курс предназначен для студентов технических специальностей очной формы обучения. Разработка может быть использована в качестве основного учебного материала

Авторы

**Мардасова И.В. – к.ф.-м.н., доцент кафедры
«Физика»**

**Шкиль Т.В. – к.ф.-м.н., доцент кафедры
«Физика»**

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лекция 1. Элементы кинематики.....	6
1.1 Введение.....	6
1.2 Основные кинематические понятия и характеристики.	9
1.3. Нормальное, тангенциальное и полное ускорения.....	11
1.4. Угловая скорость и угловое ускорение.	13
Лекция 2. Динамика материальной точки.	16
2.1 Законы Ньютона. Основное уравнение динамики поступательного движения.....	16
2.2 Виды взаимодействий. Силы упругости и трения.....	18
2.3 Закон Всемирного тяготения. Сила тяжести и вес тела.....	19
Лекция 3. Работа и энергия. Законы сохранения энергии и импульса	22
3.1 Работа и мощность.....	22
3.2 Закон сохранения импульса.....	23
3.3 Энергия. Потенциальная и кинетическая энергия. Закон сохранения энергии.....	25
Лекция 4. Динамика вращательного движения твердого тела.....	29
4.1 Момент инерции.....	29
4.2 Момент силы.	31
Лекция 5. Закон сохранения момента импульса	34
5.1 Момент импульса.....	34
5.2 Закон сохранения момента импульса.....	35
5.3 Гироскоп.	36
5.4 Работа и кинетическая энергия при вращательном движении.....	37
Лекция 6. Элементы механики жидкостей.....	39
6.1 Давление жидкости и газа.....	39
6.2 Уравнение неразрывности. Уравнение Бернулли.	40
6.3 Вязкость (внутреннее трение). Ламинарный и турбулентный режимы течения жидкостей.	42
Лекция 7. Элементы релятивистской механики.	44
7.1 Принцип относительности и преобразования Галилея.....	44
7.2 Постулаты специальной теории относительности.....	45

Физика

7.3 Преобразования Лоренца и следствия из них.	46
7.4 Основной закон релятивистской динамики. Закон взаимосвязи массы и энергии. ..	50
Лекция 8. Свободные незатухающие и затухающие механические колебания	53
8.1 Гармонические колебания и их характеристики.....	53
8.2 Свободные незатухающие механические колебания.	54
8.3 Свободные затухающие механические колебания.	56
8.4 Сложение гармонических колебаний	57
Лекция 9. Вынужденные механические колебания. Упругие волны.....	60
9.1 Вынужденные колебания. Резонанс.	60
9.2 Продольные и поперечные упругие волны. Принцип Гюйгенса.....	61
9.3 Уравнение плоской бегущей волны.	64
Лекция 10. Уравнение состояния идеального газа и основное уравнение МКТ	66
10.1 Основные положения и основные понятия МКТ.	66
10.2 Уравнение состояния идеального газа. Опытные газовые законы.....	67
10.3 Основное уравнение МКТ идеальных газов.....	69
Лекция 11. Распределения Максвелла и Больцмана. Явления переноса	71
11.1 Закон Максвелла о распределении молекул по скоростям. Характерные скорости молекул.	71
11.2 Распределение Больцмана.	73
11.3 Средняя длина свободного пробега молекул.	74
11.4 Явления переноса.	75
Лекция 12. Основы термодинамики.....	81
12.1 Основные понятия термодинамики.....	81
12.2 Число степеней свободы молекулы. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы.....	82
12.3 Внутренняя энергия и работа газа при расширении. I закон термодинамики.....	83
12.4 Теплоемкость	85
Лекция 13. Основы термодинамики (продолжение)	87
13.1 Применение I закона термодинамики к изопроцессам. Адиабатный процесс.	87
13.2 Тепловые двигатели, их КПД. Цикл Карно.....	88
13.3 Понятие об энтропии. Второе начало термодинамики.....	91

Лекция 14. Электростатическое поле.....	95
14.1 Электрические заряды, их свойства и классификация. Закон Кулона.	95
14.2 Напряженность электростатического поля. Принцип суперпозиции электрических полей. Поток вектора \vec{E}	97
14.3 Теорема Гаусса для потока вектора \vec{E} и ее применение для расчета полей протяженных зарядов в вакууме.	100
Лекция 15. Потенциал электростатического поля. Диэлектрики в электростатическом поле. ...	103
15.1 Работа при перемещении заряда в электростатическом поле. Потенциал. Разность потенциалов.	103
15.2 Связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля. Эквипотенциальные поверхности.	105
15.3 Диполь в электрическом поле. Поляризация диэлектриков.	106
Лекция 16. Проводники в электрическом поле.....	111
16.1 Электроемкость проводников и конденсаторов.	111
16.2 Электроемкость уединенного проводника. Электроемкость шара.	112
16.3 Конденсаторы и их электроемкость. Последовательное и параллельное соединение конденсаторов.	113
16.4 Энергия электростатического поля.	114
Лекция 17. Постоянный электрический ток.	117
17.1 Сила и плотность тока. Электродвижущая сила и напряжение.....	117
17.2 Закон Ома. Сопротивление проводников. Последовательное и параллельное соединение проводников.	121
17.3 Работа и мощность тока. Закон Джоуля-Ленца.....	124
17.4 Правила Кирхгофа для разветвленных цепей.	124

Лекция 1. Элементы кинематики.

1.1 Введение.

Физику можно назвать наукой о наиболее общих свойствах и законах движения материи.

В настоящее время известны два вида материи - вещество (атомы, молекулы, тела) и поле (гравитационное, электромагнитное); наблюдается взаимное превращение различных видов материи (${}_{-1}^0e + {}_1^0e \rightarrow 2\gamma$, возможен обратный процесс).

Материя находится в непрерывном движении, под которым понимается всякое изменение вообще. Движение - неотъемлемое свойство материи, которое неуничтожимо, как сама материя.

Материя существует и движется в пространстве и во времени, которые являются формами бытия материи.

Форм движения материи много. Предмет «Физика» изучается в порядке усложнения форм движения материи и делится на следующие разделы: механика, молекулярная физика, электричество и магнетизм, оптика, физика атома и атомного ядра.

“Физика” – от греческого “физис” – природа. Так называлось сочинение Аристотеля (3 в. до н.э.), содержащие все имевшиеся к тому времени сведения о природе (астрономии, медицине, земледелии). Позднее, когда знания стали обширными, физика разделилась на ряд наук: физику, химию, биологию, астрономию, геологию и др. Среди них физика заняла ведущее место, т.к. ее выводы и законы являются наиболее общими для других наук (например, законы сохранения).

Обычно любое физическое исследование проходит ряд этапов.

Первый этап исследования – наблюдение явления, т.е. исследование явления в естественных условиях его протекания (“живое созерцание”).

На основе наблюдения строится гипотеза – научное предположение о причине наблюдаемого явления и его связи с другими.

Истинность гипотезы проверяется на практике с помощью дополнительных наблюдений или специально поставленных опытов, экспериментов (эксперимент – это изучение явления в искусственных условиях его протекания).

В случае подтверждения гипотезы строится модель явления и теория, описывающая поведение модели. Любая физическая теория относится к вполне определенной модели явления, поэтому имеет вполне определенные границы применимости. Например, механика Ньютона основана на модели абсолютного пространства и независимого от него абсолютного времени. Эта модель была заменена более точной моделью единого пространства и времени (моделью Эйнштейна).

Правильность теории проверяется практикой (физическая теория - система основных идей, обобщающих опытные данные и отражающих объективные закономерности природы).

Большое значение имеет метод физических абстракций (идеальный газ, материальная точка). Широко используются основные формы умозаключений:

Физика

анализ и синтез, индукция и дедукция. Анализ – расчленение; синтез – объединение; индукция – от частного к общему; дедукция – от общего к частному.

Физику подразделяют на так называемую классическую физику и физику квантовую.

Классической называется та физика, начало которой было положено Ньютоном и создание которой было завершено в начале XX столетия.

Ньютоновская механика оказалось настолько плодотворной, что у физиков сложилось представление о том, что любое физическое явление можно объяснить с помощью ньютоновских законов.

Однако такие блестящие достижения физики как открытие электрона (1897г.), создание электронной теории, теории относительности, квантовой теории требовали пересмотра установившихся физических понятий и представлений. Таким образом, наши знания на каждой ступени развития науки обусловлены исторически достигнутым уровнем познания и не могут считаться окончательными, полными. Они по необходимости являются относительными знаниями, т.е. нуждаются в дальнейшем развитии, в дальнейшей проверке и уточнении. Вместе с тем, всякая подлинно научная теория, несмотря на свою относительность и неполноту, содержит элементы абсолютного, т.е. полного знания, означает ступень в познании объективного мира.

Развитие физики тесно связано с развитием человеческого общества, с потребностями практики, с развитием производительных сил. Физические открытия приводили к развитию технических наук, к созданию новых отраслей техники (лазерная и полупроводниковая техника). В свою очередь, развитие техники побуждает к развитию физики, требуя разрешения физических проблем, связанных с дальнейшим техническим прогрессом. Техника снабжает физику новыми, более совершенными приборами, создавая условия для развития науки.

История развития физики свидетельствует о том, что каждое очередное фундаментальное открытие явилось не только базой для дальнейшего развития цивилизации, но и использовалось для совершенствования военной техники. Достижения в области физики атомного ядра привели к созданию ядерного оружия; открытие явления индуцированного (вынужденного) излучения света атомами привело к созданию квантовых генераторов электромагнитных волн, т.е. к созданию лазерного оружия; явление интерференции в тонких пленках положено в основу создания самолетов “невидимок” и т.д.

Физические законы выражаются в виде математических соотношений между физическими величинами. Под физическими величинами понимают измеряемые характеристики (свойства) физических объектов: предметов, состояний, процессов. В физике применяются 7 основных величин: длина, время, масса, температура, сила тока, количество вещества, сила света; остальные величины производные.

Необходимо различать скалярные и векторные величины. Скалярные величины полностью характеризуются численными значениями и единицей измерения; могут иметь положительное или отрицательное численное значение (исключение составляет температура по шкале Кельвина).

Векторная величина полностью характеризуется численным значением, единицей измерения и направлением. Для указания на векторный характер

Физика

физической величины над обычным ее обозначением ставится стрелка. Векторная величина геометрически изображается вектором, т.е. отрезком, имеющим определенное направление и длину.

Математические операции над векторными величинами подчиняются особым закономерностям.

1. Сложение векторов

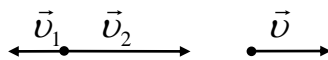
$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

а) \vec{v}_1 и \vec{v}_2 сонаправлены



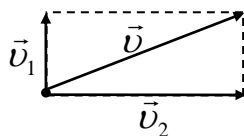
$$v = v_1 + v_2$$

б) \vec{v}_1 и \vec{v}_2 направлены противоположно



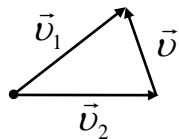
$$v = v_1 - v_2$$

в) $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$, используется правило параллелограмма

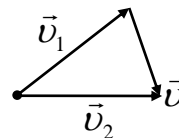


$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

2. Вычитание векторов



$$\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$



$$\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

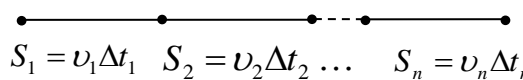
3. Производная вектора

$$\Delta \vec{r}, \Delta t, \vec{v} - ? \quad \vec{v}_{cp} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \quad \vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'_t = \dot{\vec{r}}$$

Δ – знак изменения,

d – знак бесконечно малого изменения.

4. Понятие интеграла.



$$S_1 = v_1 \Delta t_1 \quad S_2 = v_2 \Delta t_2 \quad \dots \quad S_n = v_n \Delta t_n$$

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_n = v_1 \Delta t_1 + \dots + v_n \Delta t_n = \sum_{i=1}^n v_i \Delta t_i$$

Если n – велико, а Δt – мало, то $S = \int_0^t v dt$.

При $v = const$ $S = v \int_0^t dt = vt$.

Примеры интегралов: $\int dt = t$, $\int A t^k dt = A \int t^k dt$, $\int t^k dt = \frac{t^{k+1}}{k+1}$, $\int t dt = \frac{t^2}{2}$.

1.2 Основные кинематические понятия и характеристики.

Механика изучает механическое движение, которое является простейшей формой движения материи. Основная задача механики - определение положения тела в любой момент времени, если известно его начальное положение. В зависимости от методов решения этой задачи механику разделяют на 3 части:

- 1) статика - учение о механическом равновесии;
- 2) кинематика - учение о механическом движении без учета причин, вызывающих это движение;
- 3) динамика – учение о механическом движении с учетом причин, его вызывающих.

Механическое движение - это изменение положения тел или их частей в пространстве с течением времени. Основным объектом изучения в кинематике является материальная точка. Понятие “материальная точка” есть физическая абстракция, модель, которая вводится для упрощения описания движения.

Материальной точкой называют тело, размерами и формой которого можно пренебречь в условиях данной задачи.

Заменять реальное тело материальной точкой, т.е. объектом, обладающим массой, но не имеющим геометрических размеров, можно только для тех движений, когда справедливо пренебрежение размерами, формой и процессами, происходящими внутри тела. Если реальное тело нельзя заменить материальной точкой, используют другую физическую модель – абсолютно твердое тело.

Абсолютно твердым телом называют тело, деформациями которого можно пренебречь в условиях данной задачи.

В действительности же все реальные тела при воздействии на них деформируются.

Все виды механических движений можно свести к поступательному и вращательному движениям. Материальная точка может участвовать только в поступательном движении, прямолинейном или криволинейном, т.к. говорить о вращении точки, не имеющей размеров, бессмысленно.

Поступательным назвали такое движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается параллельной самой себе (рис.1).

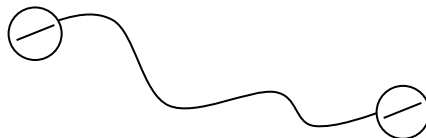


Рис. 1

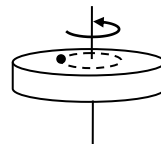


Рис. 2

Вращательным назвали такое движение, при котором все точки тела описывают концентрические окружности, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения (рис.2). Ось вращения может находиться вне тела.

Произвольное движение тела можно рассматривать как сочетание поступательного и вращательного движений. Для описания положения и движения тела необходимо выбрать систему отсчета.

Системой отсчета называют связанную с часами систему координат, жестко связанную с некоторым физическим телом, называемым телом отсчета.

Обычно система отсчета представляет собой декартову систему координат, для получения которой в пространстве выбирают тело отсчета O и строят относительно него три взаимно перпендикулярные оси, обычно обозначаемые X, Y, Z .

В такой системе отсчета положение материальной точки M можно задать либо ее координатами $M(x, y, z)$, либо радиус-вектором \vec{r} . Радиус-вектор однозначно связан с координатами точки и задается следующим образом:

$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные векторы, направленные вдоль осей координат.

Численное значение вектора \vec{r} определяется соотношением

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Исходя из симметрии решаемой задачи в качестве системы отсчета могут быть также использованы полярная и косоугольная системы координат.

Для описания движения используют понятия: траектория, путь, перемещение, скорость, ускорение.

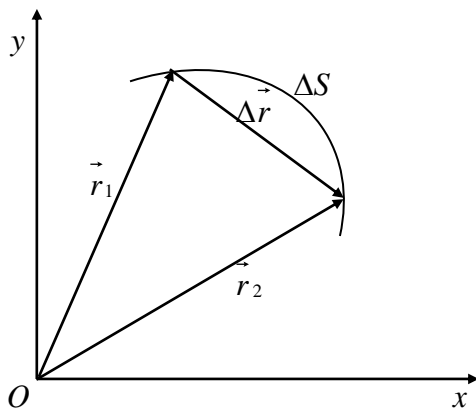


Рис. 3

Траектория - линия, описываемая точкой в пространстве (прямолинейная или криволинейная).

Если траектория лежит в одной плоскости, движение называют плоским (рис.3).

Путь S - длина траектории, скалярная величина, $[S]=1\text{м}$.

Перемещение $\Delta\vec{r}$ - вектор, соединяющий начальное и конечное положение точки и направленный к конечному положению. $[\Delta\vec{r}]=1\text{м}$.

Средняя скорость перемещения равна отношению перемещения $\Delta\vec{r}$ к интервалу времени Δt , за которое это перемещение произошло:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \quad [\vec{v}] = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Направление вектора $\langle \vec{v} \rangle$ совпадает с направлением вектора перемещения $\Delta\vec{r}$.

Мгновенная скорость - векторная величина, равная первой производной радиуса-вектора движущейся точки по времени: $\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$.

При $\Delta t \rightarrow 0$ уменьшается различие между $\Delta\vec{r}$ и ΔS , $\Delta S \rightarrow |\Delta\vec{r}|$, т.е. численное значение мгновенной скорости равно первой производной пути по времени:

$$v = |\vec{v}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}.$$

Для характеристики быстроты изменения скорости вводится понятие ускорения.

Средним ускорением называют отношение изменения скорости $\Delta \vec{v}$ к интервалу времени Δt , за которое это изменение произошло:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \quad [\vec{a}] = 1 \frac{м}{с^2}.$$

Направление вектора $\langle \vec{a} \rangle$ совпадает с направлением вектора $\Delta \vec{v}$.

Мгновенное ускорение - векторная величина, равная первой производной скорости по времени:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt};$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2},$$

$$a = |\vec{a}| = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2}.$$

Типы прямолинейного движения:

а) **переменное движение** - движение, при котором изменяются как скорость, так и ускорение,

$$v = \frac{dS}{dt}, \quad dS = v dt, \quad S = \int_0^t v dt,$$

$$a = \frac{dv}{dt}, \quad dv = a dt, \quad v = \int_0^t a dt + v_0;$$

б) **равнопеременное движение** – движение с постоянным ускорением,

$\vec{a} = const$, $a > 0$ - равноускоренное, $a < 0$ - равнозамедленное,

$$v = v_0 + \int_0^t a dt = v_0 + at; \quad a = \frac{v - v_0}{t},$$

$$S = \int_0^t v dt = \int_0^t (v_0 + at) dt = \int_0^t v_0 dt + \int_0^t at dt = v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

$$v^2 - v_0^2 = 2aS; \quad S = \langle v \rangle \cdot t; \quad \langle v \rangle = \frac{v + v_0}{2};$$

в) **равномерное движение** – движение с постоянной скоростью,

$$\vec{v} = const, \quad a = 0, \quad S = vt, \quad v = \frac{S}{t}.$$

1.3. Нормальное, тангенциальное и полное ускорения.

Движение тела характеризуется скоростью и ускорением, которые могут изменяться во времени. Пусть материальная точка движется по плоской криволинейной траектории с переменной по величине и направлению скоростью (рис. 4). Для характеристики степени криволинейности вводится понятие радиуса кривизны в данной точке траектории.

Физика

Радиусом кривизны R траектории называют радиус окружности, которая сливается с криволинейной траекторией на бесконечно малом ее участке.

В данной точке траектории касательная всегда перпендикулярна радиусу кривизны.

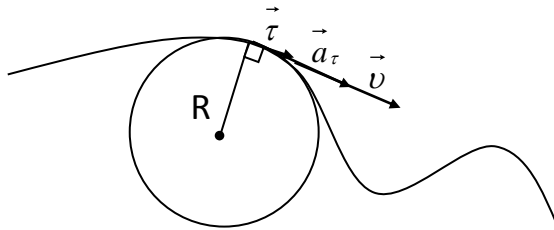


Рис. 4

Пусть и скорость, и ускорение меняются по величине и направлению.

Мы знаем, что ускорение тела при движении есть $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

Вектор скорости \vec{v} можно представить как произведение модуля скорости v и некоторого единичного вектора $\vec{\tau}$, сонаправленного с вектором

линейной скорости \vec{v} , направленного по касательной к траектории.

$$\vec{v} = v \vec{\tau},$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v\vec{\tau}) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Таким образом, полное ускорение материальной точки при криволинейном движении можно представить в виде суммы двух слагаемых. Первое слагаемое

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}$$

Вектор \vec{a}_τ направлен по касательной к траектории и называется

тангенциальным или **касательным ускорением**. Его модуль равен $a_\tau = \frac{dv}{dt}$,

поэтому a_τ характеризует быстроту изменения скорости криволинейного движения только по величине, так как вектор $\vec{\tau}$ не изменяется.

Следовательно, можно заключить, что \vec{a}_τ - тангенциальное ускорение, характеризует изменение скорости по величине и направлено по касательной к траектории.

Второе слагаемое $\vec{a}_n = v \frac{d\vec{\tau}}{dt}$ называется **нормальным ускорением**. Что характеризует этот вектор, куда направлен, как его рассчитать?

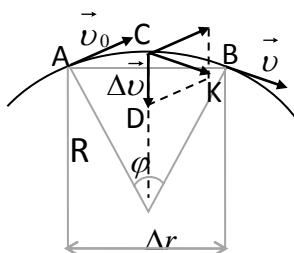


Рис. 5

Так как вектор \vec{a}_n сонаправлен с вектором $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$, который определяет изменение направления вектора линейной скорости, то он характеризует изменение скорости криволинейного движения по направлению.

Определим величину и направление \vec{a}_n . Рассмотрим частный случай движения материальной точки по окружности радиусом R с постоянной по величине

скоростью v (рис.5). Среднее изменение скорости на дуге АВ отнесем к точке С, лежащей посередине дуги.

$$|\vec{v}_o| = |\vec{v}| = v, \quad \vec{a} = \vec{a}_n, \quad a_\tau = 0$$

$$\vec{a}_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v} - \vec{v}_o}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t},$$

$$\vec{v}_o + \Delta \vec{v} = \vec{v}, \quad \Delta \vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_o.$$

\vec{a}_n направлено вдоль радиуса R к центру окружности.

$$\triangle OAB \sim \triangle KDC: \frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{R}, \quad \Delta v = v \frac{\Delta r}{R},$$

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v \Delta r}{R \Delta t} = \frac{v}{R} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{v v}{R} = \frac{v^2}{R}.$$

\vec{a}_n перпендикулярно скорости, направлено вдоль радиуса кривизны траектории к центру окружности. Его называют нормальным, радиальным или центростремительным ускорением.

Полное ускорение материальной точки при криволинейном движении характеризует быстроту изменения скорости как по величине, так и по направлению (рис.6).

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}}.$$

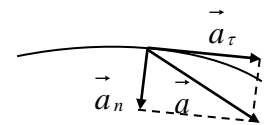


Рис. 6

1.4. Угловая скорость и угловое ускорение.

Поворот тела на некоторый угол можно задать в виде отрезка, длина которого равна ϕ , а направление совпадает с осью, вокруг которой производится поворот. Направление поворота и изображающего его отрезка связано правилом правого винта.

В математике показывается, что очень малые повороты можно рассматривать как векторы, обозначаемые символами $\Delta \vec{\phi}$ или $d\vec{\phi}$.

Направление вектора поворота связывается с направлением вращения тела; $d\vec{\phi}$ - вектор элементарного поворота тела, является псевдовектором, так как не имеет точки приложения.

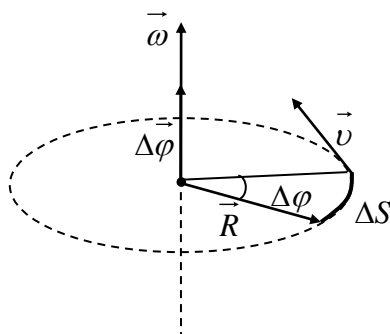


Рис. 7

При вращательном движении твердого тела каждая точка движется по окружности, центр которой лежит на общей оси вращения (рис. 7). При этом радиус-вектор R, направленный от оси вращения к точке, поворачивается за время Δt на

Физика

некоторый угол $\Delta\varphi$. Для характеристики вращательного движения вводится угловая скорость и угловое ускорение.

Угловой скоростью называется векторная величина, равная первой производной угла поворота тела по времени:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \quad [\vec{\omega}] = \frac{рад}{с}.$$

Угол в 1 радиан – это центральный угол, длина дуги которого равна радиусу окружности; $360^\circ = 2\pi$ рад.

Направление угловой скорости задается **правилом правого винта**: вектор угловой скорости сонаправлен с $d\vec{\varphi}$, то есть с поступательным движением винта, головка которого вращается в направлении движения точки по окружности.

Линейная скорость точки связана с угловой скоростью:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R\Delta\varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega R.$$

В векторной форме $\vec{v} = [\vec{\omega} \vec{R}]$.

Если в процессе вращения угловая скорость изменяется, то возникает угловое ускорение.

Угловое ускорение – векторная величина, равная первой производной угловой скорости по времени:

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \quad [\varepsilon] = 1 \frac{рад}{с^2}.$$

Вектор угловой скорости сонаправлен с вектором элементарного изменения угловой скорости $d\vec{\omega}$, происшедшего за время dt .

При ускоренном движении вектор $\vec{\varepsilon}$ сонаправлен $\vec{\omega}$ (рис. 8), при замедленном – противоположен (рис. 9).

Угловое ускорение возникает в системе только тогда, когда происходит изменение угловой скорости, то есть когда линейная скорость движения изменяется по величине. Изменение же скорости по величине характеризует тангенциальное ускорение.

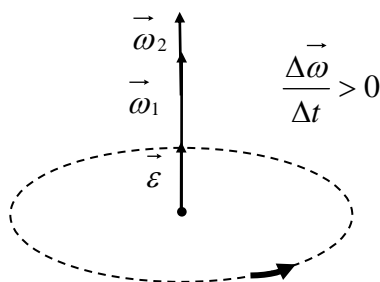


Рис. 8

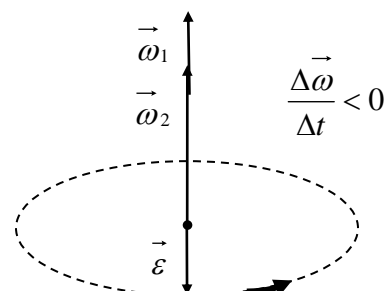


Рис. 9

Найдем связь между угловым и тангенциальным ускорениями:

Физика

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{d(R\omega)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon.$$

Изменение направления скорости при криволинейном движении характеризуется нормальным ускорением \vec{a}_n :

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R.$$

Таким образом, связь между линейными и угловыми величинами выражается следующими формулами:

$$\Delta S = R\Delta\varphi, \quad v = R\omega, \quad a_{\tau} = \varepsilon R, \quad a_n = \omega^2 R.$$

Типы вращательного движения

а) **переменное** – вращательное движение, при котором изменяются ω и ε :

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow d\varphi = \omega dt \Rightarrow \varphi = \int \omega dt + c = \int \omega dt + \varphi_0,$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \varepsilon dt \Rightarrow \omega = \int \varepsilon dt + c = \int \varepsilon dt + \omega_0;$$

б) **равнопеременное** – вращательное движение с постоянным угловым ускорением:

$$\varepsilon = \text{const}, \quad \varphi = \varphi_0 + \int (\omega_0 + \varepsilon t) dt = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad \omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi.$$

в) **равномерное** – вращательное движение с постоянной угловой скоростью:

$$\vec{\omega} = \text{const}, \quad \varepsilon = 0, \quad \omega = \frac{\varphi}{t}.$$

Равномерное вращательное движение можно характеризовать периодом T и частотой вращения ν .

Период – это время, за которое тело совершает один полный оборот.

$$T = \frac{t}{N}, \quad [T] = \text{с}.$$

Частота вращения – это число оборотов совершаемых за единицу времени.

$$\nu = \frac{N}{t}, \quad [\nu] = \text{с}^{-1}.$$

За один оборот:

$$S = 2\pi R, \quad t = T, \quad \varphi = 2\pi,$$

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu, \quad v = \frac{S}{t} = \frac{2\pi R}{T} = \omega R.$$

Лекция 2. Динамика материальной точки.

2.1 Законы Ньютона. Основное уравнение динамики поступательного движения.

Динамика изучает движение тел с учетом причин, вызывающих это движение. Основу динамики составляют законы Ньютона.

I закон. Существуют инерциальные системы отсчета (ИСО), в которых материальная точка (тело) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не выведет ее из этого состояния.

Свойство тела сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения при отсутствии воздействия на него других тел называется **инертностью**.

ИСО называют систему отсчета, в которой тело, свободное от внешних воздействий, покоится или движется равномерно прямолинейно.

Инерциальной является система отсчета, которая покоится или движется равномерно прямолинейно относительно какой-либо ИСО.

Система отсчета, движущаяся с ускорением относительно ИСО, является неинерциальной.

I закон Ньютона, называемый также законом инерции, был впервые сформулирован Галилеем. Его содержание сводится к 2-м утверждениям:

все тела обладают свойством инертности;

существуют ИСО.

Принцип относительности Галилея: все механические явления во всех ИСО происходят одинаково, т.е. никакими механическими опытами внутри ИСО невозможно установить, покоится данная ИСО или движется равномерно прямолинейно.

Инерциальной с большой точностью можно считать систему отсчета, в начале координат которой находится Солнце, а оси координат направлены на неподвижные относительно Солнца звезды.

В большинстве практических задач систему отсчета, жестко связанную с Землей, можно считать ИСО.

Из опыта известно, что при одинаковых воздействиях различные тела неодинаково изменяют свою скорость, т.е. приобретают различные ускорения, ускорение тел зависит от их массы.

Масса - мера инерционных и гравитационных свойств тела. С помощью точных экспериментов установлено, что инертная и гравитационная массы пропорциональны друг другу. Выбирая единицы таким образом, чтобы коэффициент пропорциональности стал равным единице, получим, что $m_i = m_g$, поэтому говорят просто о массе тела.

$[m] = 1 \text{ кг}$ - масса платино-иридиевого цилиндра, диаметр и высота которого равны $h = d = 39 \text{ мм}$.

Чтобы характеризовать действие одного тела на другое, вводят понятие силы.

Сила - мера взаимодействия тел, в результате которого тела изменяют свою скорость или деформируются.

Сила характеризуется численным значением, направлением, точкой приложения. Прямая, вдоль которой действует сила, называется **линией действия силы**. Одновременное действие на тело нескольких сил эквивалентно действию одной силы, называемой **равнодействующей** или **резльтирующей силой** и равной их геометрической сумме:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

Второй закон Ньютона - основной закон динамики поступательного движения - отвечает на вопрос, как изменяется движение тела под действием приложенных к нему сил.

II закон. Ускорение материальной точки прямо пропорционально действующей на нее силе, обратно пропорционально ее массе и совпадает по направлению с действующей силой.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \text{ где } \vec{F} - \text{равнодействующая сила.}$$

Силу можно выразить формулой

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad [\vec{F}] = 1 \text{ кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 1 \text{ Н}.$$

1Н - это сила, под действием которой тело массой 1 кг получает ускорение 1м/с² в направлении действия силы.

Второй закон Ньютона можно записать в другом виде, введя понятие импульса:

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad [\vec{p}] = 1 \text{ кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Импульс - векторная величина, численно равная произведению массы тела на его скорость и сонаправленная с вектором скорости.

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} - \text{основное уравнение динамики поступательного движения:}$$

скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на нее силе.

Согласно этому закону, изменение импульса материальной точки равно импульсу действующей на нее силы:

$$d\vec{p} = \vec{F}dt, \quad \Delta\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt, \quad \Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t.$$

Импульс силы $F\Delta t$ равен произведению силы на время ее действия.

Характер взаимодействия между телами определяется 3-м законом Ньютона.

III закон. Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по величине, противоположными по направлению и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки (рис. 1):

Физика



Рис.1

2.2 Виды взаимодействий. Силы упругости и трения.

Физическими называются взаимодействия, приводящие к изменению скорости тел. Физические взаимодействия делятся на 2 типа: фундаментальные и производные.

Фундаментальные взаимодействия:

1. гравитационное ;
2. электромагнитное;
3. сильное (ядерное) - в 100 раз больше электромагнитного, в 10^{15} раз гравитационного; радиус действия $R \sim 10^{-14}\text{м} - 10^{-15}\text{м}$;
4. слабое (взаимодействие легких частиц: лептонов, нейтрино и т.п.), $R \sim 10^{-18}\text{м}$.

Эти взаимодействия называются фундаментальными потому, что:

а) ни одно из их свойств не объяснено в настоящее время на основе более общих законов;

б) все остальные взаимодействия могут быть представлены как результат фундаментальных взаимодействий.

Взаимодействие тел на расстоянии осуществляется материальным объектом - полем и происходит с конечной скоростью, равной скорости света в вакууме c .

Поле - особая форма существования материи. **Силовое поле** - область пространства, в каждой точке которой на материальную частицу действует определенная по величине и направлению сила, зависящая от координат этой точки. Поле играет роль носителя данного вида взаимодействия.

В механических процессах действуют различные силы: упругости, трения, тяжести, вес.

Сила упругости - это сила, возникающая в теле при упругой деформации (имеет электромагнитную природу).

Упругой называют деформацию, при которой тело восстанавливает первоначальную форму и размеры после прекращения действия деформирующей силы.

Пластической называют деформацию, при которой тело принимает новые форму и размеры после прекращения действия деформирующей силы.

В реальных телах упругие деформации всегда сочетаются с пластическими.

Закон Гука. Сила упругости, возникающая в теле при упругой деформации, пропорциональна величине деформации и направлена в сторону, противоположную деформации:

$$\vec{F}_{\text{уп}} = -k\vec{x},$$

$$k = \frac{F_{\text{уп}}}{x}, \quad [k] = 1 \frac{\text{Н}}{\text{м}},$$

где k - жесткость или коэффициент упругости, численно равный силе упругости, возникающей при единичной деформации;

x - деформация тела, численно равная абсолютному изменению его длины.

Силы трения возникают при перемещении соприкасающихся тел (или их частей) друг относительно друга, они направлены по касательной к трущимся поверхностям и противодействуют относительному смещению этих поверхностей.

Сила трения возникает не только при скольжении одной поверхности относительно другой, но и при попытке вызвать такое скольжение. В этом случае она называется силой трения покоя.

Максимальная сила трения покоя и сила трения скольжения прямо пропорциональны величине силы нормального давления F_N , прижимающей трущиеся поверхности друг к другу:

$$F_{mp} = \mu F_N,$$

где μ - коэффициент трения, безразмерная величина.

Силы трения имеют электромагнитную природу.

2.3 Закон Всемирного тяготения. Сила тяжести и вес тела.

Все тела взаимно притягивают друг друга. Закон, которому подчиняется это притяжение, был установлен Ньютоном и носит название **закона Всемирного тяготения**. Согласно этому закону, сила, с которой две материальные точки притягивают друг друга, прямо пропорциональна произведению их масс и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними (рис.2):

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (1)$$

где $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$ - гравитационная постоянная.

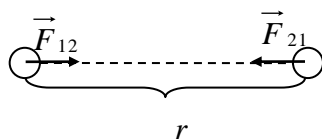


Рис.2

Впервые экспериментальное доказательство закона всемирного тяготения для земных тел и числовое определение G проведено английским физиком Т. Кавендишем (1798 г). Если в (1) подставить $m_1 = m_2 = 1 \text{ кг}$, $r = 1 \text{ м}$, то сила оказывается численно равной G .

Физический смысл G : две материальные точки с массой по 1 кг, находящиеся на расстоянии 1 м друг от друга, взаимно притягиваются с силой $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н}$.

F - гравитационная сила или сила Всемирного тяготения, она направлена вдоль прямой, соединяющей материальные точки.

Для определения силы взаимного притяжения тел их нужно разбить на элементарные массы, подсчитать по формуле (1) силы притяжения между всеми попарно взятыми элементами, а затем геометрически их сложить (проинтегрировать), что является сложной математической задачей.

Если взаимодействующие тела - однородные шары, такие вычисления приводят к формуле (1), где r - расстояние между их центрами.

Сила тяжести - это сила, под действием которой тело падает на поверхность планеты с ускорением свободного падения.

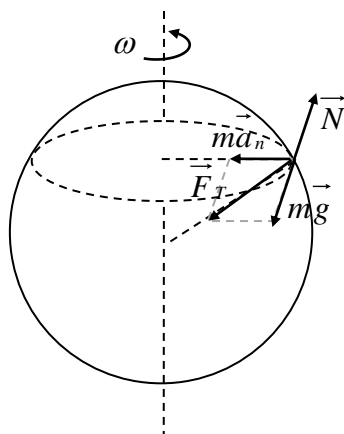


Рис. 3

Если не учитывать вращения планеты, то сила тяжести совпадает с силой тяготения к планете. Однако на тело действует ещё сила реакции земной поверхности. Равнодействующая этих сил создаёт нормальное ускорение \vec{a}_n , направленное к центру окружности, по которой движется тело в процессе его суточного вращения (рис.3). С учётом этих факторов сила тяжести численно равна \vec{N} , но направлена противоположно ей вдоль линии отвеса.

$$\vec{F}_T + \vec{N} = m\vec{a}_n.$$

На полюсе: $mg = F_T$.

На экваторе: $mg = F_T - m\omega^2 R$,

где ω - угловая скорость суточного вращения Земли.

Вследствие воздействия на тело силы тяжести тело давит на опору или растягивает подвес, на котором висит (рис. 4).

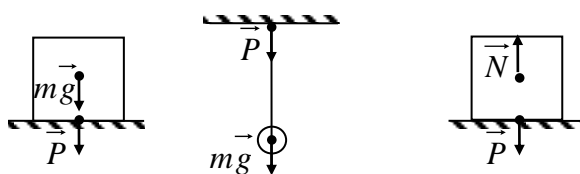


Рис. 4

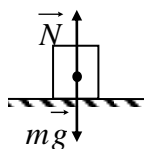
Вес \vec{P} - это сила, с которой тело давит на опору или растягивает подвес.

\vec{N} - сила реакции опоры.

Согласно третьему закону Ньютона,

$\vec{P} = -\vec{N}$, или $P = N$. Определим вес тела массой m в различных ситуациях.

1. Тело покоится или движется равномерно прямолинейно относительно поверхности Земли.

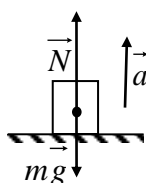


$$\vec{N} + m\vec{g} = 0,$$

$$N = mg,$$

$$P = mg.$$

2. Тело движется вертикально вверх с ускорением a (или вниз с замедлением).



$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a},$$

$$N - mg = ma,$$

$$N = m(g + a),$$

$$P = m(g + a).$$

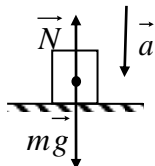
Физика

Перегрузка показывает, во сколько раз вес тела, движущегося с ускорением, больше веса неподвижного тела.

$$n = \frac{m(g + \alpha)}{mg} = \frac{g + \alpha}{g}.$$

Примеры перегрузок: при взлёте самолёта - 1,5; у лётчика в момент катапультирования - до 16.

3. Тело движется вертикально вниз с ускорением a (или вверх с замедлением).



$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a},$$

$$mg - N = ma,$$

$$N = m(g - a),$$

$$m = m(g - a).$$

В этом случае вес уменьшается по сравнению с весом неподвижного тела.

Если $a = g$, то $P = 0$.

Невесомость - это состояние тела, когда его вес равен нулю.

Лекция 3. Работа и энергия. Законы сохранения энергии и импульса

3.1 Работа и мощность

Когда под действием некоторой силы тело совершает перемещение, то действие силы характеризуется величиной, которая называется механической работой.

Механическая работа - мера действия силы, в результате которого тела совершают перемещение.

Работа постоянной силы. Если тело движется прямолинейно под действием постоянной силы \vec{F} , составляющей некоторый угол α с направлением

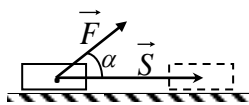


Рис. 1

перемещения \vec{S} (рис.1), работа равна произведению этой силы на перемещение точки приложения силы и на косинус угла α между векторами \vec{F} и \vec{S} ; или работа равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения: $A = \vec{F} \cdot \vec{S} = FS \cos \alpha$, $[A] = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}$.

1 Дж - работа, совершаемая силой в 1Н при перемещении на 1м в направлении действия силы.

если α - острый угол, $\alpha < \frac{\pi}{2}$, $\cos \alpha > 0$, $A > 0$;

если α - тупой угол, $\alpha > \frac{\pi}{2}$, $\cos \alpha < 0$, $A < 0$;

если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\cos \alpha = 0$, $A = 0$.

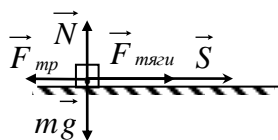


Рис. 2

$$A_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} S \cos \pi = -F_{\text{тр}} S;$$

$$A_{\text{тяги}} = F_{\text{тяги}} S \cos 0 = F_{\text{тяги}} S;$$

$$A_{\text{тяж}} = 0.$$

Работа переменной силы. Чтобы найти работу переменной силы, пройденный путь разбивают на большое число малых участков так, чтобы их можно было считать прямолинейными, а действующую в любой точке данного участка силу - постоянной.

Элементарная работа (т.е. работа на элементарном участке $d\vec{S}$) равна $dA = \vec{F} d\vec{S} = F dS \cos(\vec{F}, d\vec{S})$, а вся работа переменной силы на всем пути S находится интегрированием: $A = \int_S \vec{F} d\vec{S}$.

В качестве примера работы переменной силы рассмотрим работу, совершаемую при деформации (растяжении) пружины, подчиняющейся закону Гука.

$$\vec{F}_{деф} = -\vec{F}_{уп} = k\vec{x}$$

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}_{деф} \cdot d\vec{x} = \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}.$$

Если начальная деформация $x_1=0$, то $A = \frac{kx^2}{2}$.

При сжатии пружины совершается такая же работа.

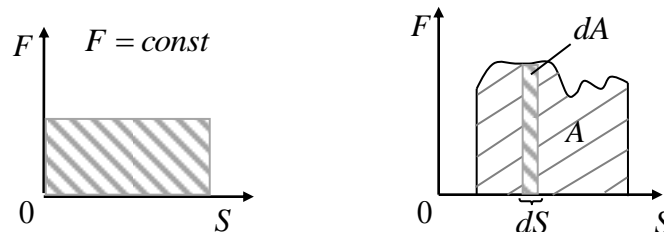


Рис. 3

Графическое изображение работы (рис.3).

На графиках работа численно равна площади заштрихованных фигур.

Для характеристики быстроты совершения работы вводят понятие мощности.

Мощность постоянной силы численно равна работе, совершаемой этой силой за единицу времени.

$$N = \frac{A}{t}, \quad [N] = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт}, \quad A = Nt.$$

1 Вт - это мощность силы, которая за 1 с совершает 1 Дж работы.

В случае переменной мощности (за малые одинаковые промежутки времени совершается различная работа) вводится понятие мгновенной мощности:

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{F dS \cos \alpha}{dt} = Fv \cos \alpha = \vec{F} \cdot \vec{v},$$

где $\vec{v} = \frac{d\vec{S}}{dt}$ – скорость точки приложения силы.

Таким образом, мощность равна скалярному произведению силы \vec{F} на скорость \vec{v} точки её приложения.

$$\text{Так как } N = \frac{dA}{dt}, \quad dA = Ndt, \quad A = \int_0^t Ndt.$$

3.2 Закон сохранения импульса.

Механической системой называется совокупность тел, выделенная для рассмотрения. Тела, образующие механическую систему, могут взаимодействовать, как между собой, так и с телами, не принадлежащими данной системе. В соответствие с этим силы, действующие на тела системы, подразделяют на внутренние и внешние.

Внутренними называются силы, с которыми тела системы взаимодействуют между собой

Внешними называются силы, обусловленные воздействием тел, не принадлежащих данной системе.

Замкнутой (или изолированной) называется система тел, на которую не действуют внешние силы.

Для замкнутых систем оказываются неизменными (сохраняются) три физических величины: энергия, импульс и момент импульса. В соответствии с этим имеют место три закона сохранения: энергии, импульса, момента импульса.

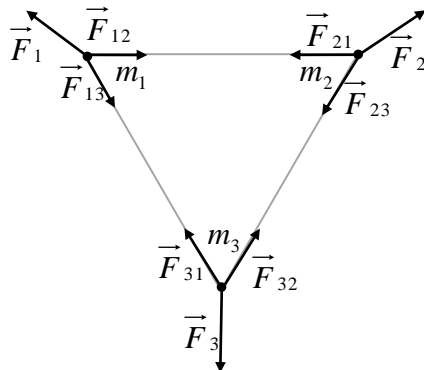


Рис. 4

Рассмотрим систему, состоящую из 3-х тел, импульсы которых $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ и на которые действуют внешние силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ (рис. 4). Согласно 3 закону Ньютона, внутренние силы попарно равны и противоположно направлены:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \vec{F}_{23} = -\vec{F}_{32}, \vec{F}_{31} = -\vec{F}_{13}.$$

Запишем основное уравнение динамики для каждого из тел и сложим почленно эти

уравнения

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned} \frac{d\vec{p}_1}{dt} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}, \\ \frac{d\vec{p}_2}{dt} &= \vec{F}_2 + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23}, \\ \frac{d\vec{p}_3}{dt} &= \vec{F}_3 + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}. \end{aligned} \right. \\
 & \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} + \frac{d\vec{p}_3}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3, \quad \sum_{i=1}^3 \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^3 \vec{F}_i. \\
 & \sum \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum \vec{p}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}, \text{ где } \vec{p} = \sum \vec{p}_i - \text{суммарный импульс системы,} \\
 & \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i.
 \end{aligned}$$

Т.о., производная по времени импульса механической системы равна геометрической сумме внешних сил, действующих на систему.

$$\text{Для замкнутой системы } \sum \vec{F}_i = 0, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{p} = \text{const}.$$

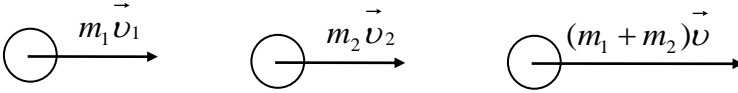
Закон сохранения импульса: импульс замкнутой системы материальных точек остается постоянным.

Из этого закона следует неизбежность отдачи при стрельбе из любого орудия. Пуля или снаряд в момент выстрела получают импульс, направленный в одну сторону, а винтовка или орудие получают импульс, направленный противоположно. Для уменьшения этого эффекта применяют специальные противооткатные устройства, в которых кинетическая энергия орудия превращается в потенциальную энергию упругой деформации и во внутреннюю энергию противооткатного устройства.

Закон сохранения импульса лежит в основе движения судов (подводных лодок) при помощи гребных колес и винтов и водометных судовых двигателей (насос всасывает забортную воду и отбрасывает ее за корму). При этом некоторое количество воды отбрасывается назад, унося с собой определенный импульс, а судно приобретает такой же импульс, направленный вперед. Этот же закон лежит в основе реактивного движения.

В качестве примера рассмотрим абсолютно неупругое соударение тел.

Абсолютно неупругий удар - столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются, двигаясь дальше как единое целое. При таком ударе механическая энергия частично или полностью переходит во внутреннюю энергию соударяющихся тел, т.е. закон сохранения энергии не выполняется, выполняется только закон сохранения импульса.



$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}, \quad \vec{v} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Теория абсолютно упругих и абсолютно неупругих ударов используется в теоретической механике для расчета напряжений и деформаций, вызванных в телах ударными силами. При решении многих задач удара часто опираются на результаты разнообразных стендовых испытаний, анализируя и обобщая их. Теория удара широко используется при расчетах взрывных процессов; применяется в физике элементарных частиц при расчетах столкновений ядер, при захвате частиц ядрами и в других процессах.

Большой вклад в теорию удара внёс российский академик Я.Б.Зельдович, который, разрабатывая в 30-х годах физические основы баллистики ракет, решил сложную задачу удара тела, летевшего с большой скоростью по поверхности среды.

3.3 Энергия. Потенциальная и кинетическая энергия. Закон сохранения энергии.

Все введенные ранее величины характеризовали только механическое движение. Однако форм движения материи много, постоянно происходит переход от одной формы движения к другой. Необходимо ввести физическую величину, характеризующую движение материи во всех формах её существования, с помощью которой можно было бы количественно сравнивать различные формы движения материи.

Энергия - мера движения материи во всех её формах. Основное свойство всех видов энергии - взаимопревращаемость. Запас энергии, которой обладает тело, определяется той максимальной работой, которую тело может совершать, израсходовав свою энергию полностью. Энергия численно равна максимальной работе, которую тело может совершить, и измеряется в тех же единицах, что и работа. При переходе энергии из одного вида в другой нужно подсчитать энергию

тела или системы до и после перехода и взять их разность. Эту разность принято называть **работой**: $A = \Delta W$.

Т. о., физическая величина, характеризующая способность тела совершать работу, называется энергией.

Механическая энергия тела может быть обусловлена либо движением тела с некоторой скоростью, либо нахождением тела в потенциальном поле сил.

Кинетическая энергия.

Энергия, которой обладает тело вследствие своего движения, называется кинетической. Работа, совершенная над телом, равна приращению его кинетической энергии. Найдем эту работу для случая, когда равнодействующая всех приложенных к телу сил равна \vec{F} .

$$A = \int (\vec{F}, d\vec{S}),$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt},$$

$$A = \int_0^v m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{S} = m \int d\vec{v} \frac{d\vec{S}}{dt} = m \int d\vec{v} \cdot \vec{v} = m \int v dv = \frac{mv^2}{2},$$

$$A = \Delta W_k, \quad W_k = \frac{mv^2}{2}.$$

Работа, совершенная телом за счет кинетической энергии, равна убыли этой энергии.

Потенциальная энергия.

Если в каждой точке пространства на тело действуют другие тела с силой, величина которой может быть различна в разных точках, говорят, что тело находится в поле сил или силовом поле.

Если линии действия всех этих сил проходят через одну точку - силовой центр поля, - а величина силы зависит только от расстояния до этого центра, то такие силы называются центральными, а поле таких сил - центральным (гравитационное, электрическое поле точечного заряда).

Поле постоянных во времени сил называется стационарным.

Поле, в котором линии действия сил - параллельные прямые, расположенные на одинаковом расстоянии друг от друга - однородное.

Все силы в механике подразделяются на консервативные и неконсервативные (или диссипативные).

Силы, работа которых не зависит от формы траектории, а определяется только начальным и конечным положениями тела в пространстве, называются **консервативными**.

Работа консервативных сил по замкнутому пути равна нулю. Все центральные силы являются консервативными. Силы упругой деформации также являются консервативными силами. Если в поле действуют только консервативные силы, поле называется потенциальными (гравитационное поле).

Силы, работа которых зависит от формы пути, называются неконсервативными (силы трения).

Потенциальной энергией называют часть общей механической энергии системы, которая определяется только взаимным расположением тел,

Физика

составляющих систему, и характером сил взаимодействия между ними. **Потенциальная энергия** - это энергия, которой обладают тела или части тела вследствие их взаимного расположения.

Понятие потенциальной энергии вводится следующим образом. Если тело находится в потенциальном поле сил (например, в гравитационном поле Земли), каждой точке поля можно сопоставить некоторую функцию (называемую потенциальной энергией) так, чтобы работа A_{12} , совершаемая над телом силами поля при его перемещении из произвольного положения 1 в другое произвольное положение 2, была равна убыли этой функции на пути $1 \rightarrow 2$:

$$W_p(1) - W_p(2) = A_{12},$$

где $W_p(1)$ и $W_p(2)$ - значения потенциальной энергии системы в положениях 1 и 2.

Записанное соотношение позволяет определить значение потенциальной энергии с точностью до некоторой неизвестной аддитивной постоянной. Однако, это обстоятельство не имеет никакого значения, т.к. во все соотношения входит только разность потенциальных энергий, соответствующих двум положениям тела. В каждой конкретной задаче условливаются считать потенциальную энергию какого-то определенного положения тела равной нулю, а энергию других положений брать по отношению к нулевому уровню. Конкретный вид функции W_p зависит от характера силового поля и выбора нулевого уровня.

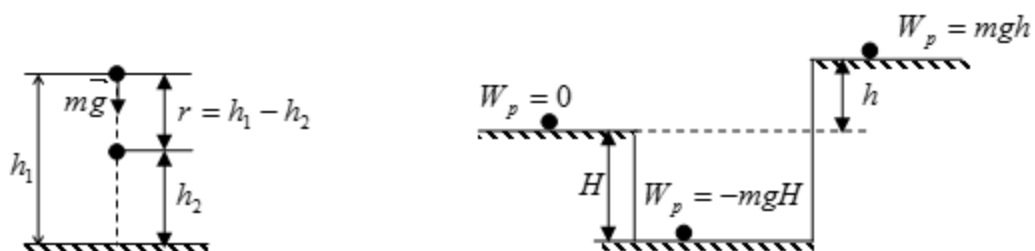


Рис. 5

Поскольку нулевой уровень выбирается произвольно, W_p может иметь отрицательные значения. Например, если принять за нуль потенциальную энергию тела, находящегося на поверхности Земли, то в поле сил тяжести вблизи земной поверхности потенциальная энергия тела массой m , поднятого на высоту h над поверхностью, равна $W_p = mgh$ (рис. 5).

$$A_{12} = W_{p1} - W_{p2},$$

$$A_{12} = m\vec{g} \cdot \vec{r} = mg(h_1 - h_2) = mgh_1 - mgh_2,$$

где $h_1 - h_2$ - перемещение тела под действием силы тяжести;

при $h_2 = 0$, $W_p = mgh$.

Потенциальная энергия этого же тела, лежащего на дне ямы глубиной H , равна

$$W_p = -mgH.$$

Физика

В рассмотренном примере речь шла о потенциальной энергии системы Земля-тело.

Потенциальной энергией может обладать не только система взаимодействующих тел, но отдельно взятое тело. В этом случае потенциальная энергия зависит от взаимного расположения частей тела.

Выразим потенциальную энергию упруго деформированного тела.

$$A_{12} = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2},$$

$$A_{12} = W_{p2} - W_{p1},$$

$$W_p = \frac{kx^2}{2} \quad - \text{потенциальная энергия упругой деформации, если принять, что}$$

потенциальная энергия недеформированного тела равна нулю; k - коэффициент упругости, x - деформация тела.

В общем случае тело одновременно может обладать и кинетической, и потенциальной энергиями. Сумма этих энергий называется полной механической энергией тела: $W = W_k + W_p$.

Полная механическая энергия системы равна сумме её кинетической и потенциальной энергий. Полная энергия системы равна сумме всех видов энергии, которыми обладает система.

Закон сохранения энергии - результат обобщения многих экспериментальных данных. Идея этого закона принадлежит Ломоносову, изложившему закон сохранения материи и движения, а количественная формулировка дана немецким врачом Майером и естествоиспытателем Гельмгольцем.

Закон сохранения механической энергии: в поле только консервативных сил полная механическая энергия остается постоянной в изолированной системе тел. Наличие диссипативных сил (сил трения) приводит к диссипации (рассеянию) энергии, т.е. превращению её в другие виды энергии и нарушению закона сохранения механической энергии.

Закон сохранения и превращения полной энергии: полная энергия изолированной системы есть величина постоянная.

Энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, а лишь превращается из одного вида в другой в эквивалентных количествах. В этом и заключается физическая сущность закона сохранения и превращения энергии: неумираемость материи и её движения. Например, при абсолютно неупругом соударении тел механическая энергия частично или полностью переходит во внутреннюю энергию соударяющихся тел, т.е. закон сохранения механической энергии не выполняется. А выполняется закон сохранения и превращения энергии.

Лекция 4. Динамика вращательного движения твёрдого тела

4.1 Момент инерции.

При рассмотрении вращательного движения необходимо ввести новые физические понятия: момент инерции, момент силы, момент импульса.

Момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении тела.

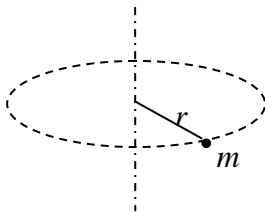


Рис. 1

Момент инерции материальной точки относительно неподвижной оси вращения равен произведению её массы на квадрат расстояния до рассматриваемой оси вращения (рис.1):

$$J = mr^2, \quad [J] = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

J зависит только от массы материальной точки и её положения относительно оси вращения и не зависит от наличия самого вращения.

Момент инерции - скалярная и аддитивная величина, поэтому момент инерции тела равен сумме моментов инерции всех его точек:

$$J = \sum_i J_i = \sum_i m_i r_i^2.$$

В случае непрерывного распределения массы эта сумма сводится к интегралу:

$$J = \int_m r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV,$$

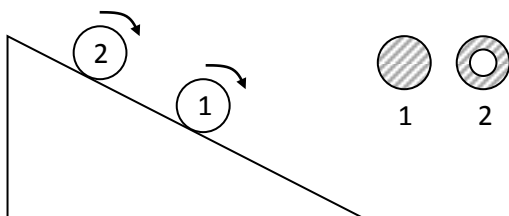
где $dm = \rho dV$ - масса малого объема тела dV , ρ - плотность тела, r - расстояние от элемента dV до оси вращения.

Момент инерции является аналогом массы при вращательном движении. Чем больше момент инерции тела, тем труднее изменить угловую скорость вращаемого тела. Момент инерции имеет смысл только при заданном положении оси вращения. Бессмысленно говорить просто о “моменте инерции”. Он зависит :

1) от положения оси вращения;

2) от распределения массы тела относительно оси вращения, т.е. от формы тела и его размеров.

Экспериментальным доказательством этого является опыт со скатывающимися цилиндрами.



$$D_1 = D_2,$$

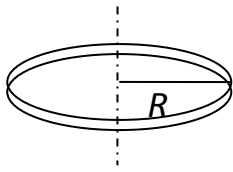
$$m_1 = m_2,$$

$$J_1 < J_2.$$

Физика

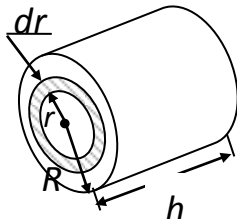
Произведя интегрирование для некоторых однородных тел, можно получить следующие формулы (ось вращения проходит через центр масс тела).

1. Момент инерции обруча (толщиной стенок пренебрегаем) или полого цилиндра:



$$J = \int R^2 dm = R^2 \int dm = mR^2.$$

2. Момент инерции диска или сплошного цилиндра радиуса R:



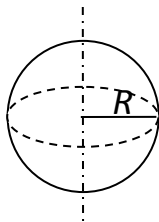
$$J = \int dJ = \int r^2 dm;$$

$$dm = \rho dV = \rho 2\pi dr h$$

$$J = \int r^2 \rho 2\pi r dr h = 2\pi \rho h \int_0^R r^3 dr = 2\pi \rho h \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} \rho \pi R^2 h R^2 = \frac{1}{2} mR^2,$$

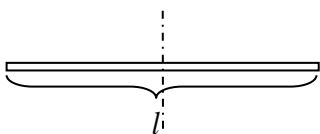
где $\pi R^2 h = V$, $\rho \cdot V = m$.

3. Момент инерции шара



$$J = \frac{2}{5} mR^2.$$

4. Момент инерции стержня



$$J = \frac{1}{12} m\ell^2.$$

Если для тела известен момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, то момент инерции относительно любой оси, параллельной первой, находится по **теореме Штейнера**: момент инерции тела относительно произвольной оси равен моменту инерции J_0 относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями.

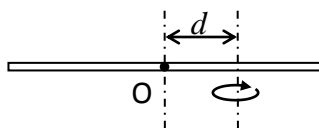


Рис.2

$J = J_0 + md^2$, где d расстояние от центра масс O до оси вращения (рис. 2).

Центр масс - воображаемая точка, положение которой характеризует распределение массы данного тела. Центр масс тела движется так же, как двигалась бы материальная точка той же массы под действием всех внешних сил, действующих на данное тело.

Понятие момента инерции было введено в механику отечественным ученым Л. Эйлером в середине XVIII века, и с тех пор широко используется при решении многих задач динамики твердого тела. Значение момента инерции необходимо знать на практике при расчете различных вращающихся узлов и систем (маховиков, турбин, роторов электродвигателей, гироскопов). Момент инерции входит в уравнения движения тела (корабля, самолета, снаряда, и т.п.). Его определяют, когда хотят узнать параметры вращательного движения летательного аппарата вокруг центра масс при действии внешнего возмущения (порыва ветра и т.п.).

4.2 Момент силы.

Одна и та же сила может сообщать вращающемуся телу разные угловые ускорения в зависимости от её направления и точки приложения. Для характеристики вращающего действия силы вводят понятие момента силы.

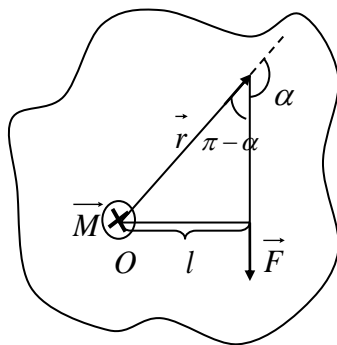


Рис. 3

Различают момент силы относительно неподвижной точки и относительно неподвижной оси. Моментом силы относительно точки O (полюса) называется векторная величина, равная векторному произведению радиус-вектора \vec{r} , проведенного из точки O в точку приложения силы, на вектор силы: $\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]$, $[M] = 1\text{Н} \cdot \text{м}$.

Поясняющий это определение рис. 3 выполнен в предположении, что точка O и вектор \vec{F} лежат в плоскости чертежа, тогда вектор \vec{r} также располагается в этой плоскости, а вектор $\vec{M} \perp$ к ней и направлен от нас (как векторное произведение 2-х векторов; по правилу правого буравчика).

Модуль момента силы численно равен произведению силы на плечо:

$$M = rF \sin \alpha = rF \sin(\pi - \alpha) = Fl,$$

где $l = r \sin(\pi - \alpha)$ - плечо силы относительно точки O, α - угол между направлениями \vec{r} и \vec{F} , $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$.

Плечо - кратчайшее расстояние от центра вращения до линии действия силы.

Вектор момента силы сонаправлен с поступательным движением правого буравчика, если его рукоятку вращать по направлению вращающего действия силы. Момент силы - аксиальный (свободный) вектор, он направлен вдоль оси вращения, не связан с определенной линией действия, его можно переносить в пространстве параллельно самому себе.

Физика

Моментом силы относительно неподвижной оси Z называется проекция вектора \vec{M} на эту ось (проходящую через точку O):

$$\vec{M}_Z = [\vec{r}\vec{F}]_Z.$$

Если на тело действуют несколько сил, то результирующий момент сил относительно неподвижной оси Z равен алгебраической сумме моментов всех сил относительно этой оси.

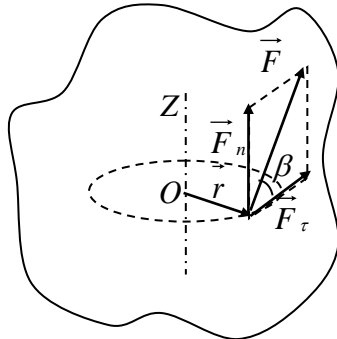


Рис. 4

Если сила, приложенная к телу, не лежит в плоскости вращения, её можно разложить на 2 компоненты: лежащую в плоскости вращения F_τ и перпендикулярную к ней F_n . Как видно из рисунка 4, F_n вращения не создает, а приводит только к деформации тела; вращение тела обусловлено только составляющей F_τ .

Основное уравнение динамики вращательного движения.

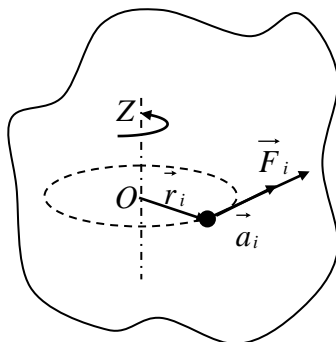


Рис. 5

Выберем произвольно некоторую точку с массой m_i , на которую действует сила \vec{F}_i , сообщая точке ускорение \vec{a}_i (рис. 5). Поскольку вращение создает только тангенциальная составляющая, для упрощения вывода \vec{F}_i направлена перпендикулярно оси вращения.

В этом случае $a_i = a_\alpha = \varepsilon r_i$.

Согласно второму закону Ньютона $F_i = m_i a_i = m_i \varepsilon r_i$. Умножим обе части равенства на r_i :

$$F_i = m_i \varepsilon r_i \quad | \times r_i ,$$

$$F_i r_i = m_i \varepsilon r_i^2 ,$$

где $F_i r_i = M_i$ - момент силы, действующей на материальную точку,

$m_i r_i^2 = I_i$ - момент инерции материальной точки.

Следовательно, $\vec{M}_i = J_i \vec{\varepsilon}$.

Для всего тела: $\sum_i \vec{M}_i = \vec{\varepsilon} \sum_i J_i$, $\vec{M} = \vec{\varepsilon} J$,

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{J}, \quad (1)$$

т.е. угловое ускорение тела прямо пропорционально моменту действующих на него внешних сил и обратно пропорционально его моменту инерции.

Физика

Уравнение (1) представляет собой уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси, или второй закон Ньютона для вращательного движения.

Лекция 5. Закон сохранения момента импульса.

5.1 Момент импульса.

При сравнении законов вращательного и поступательного движений усматривается аналогия: $m \rightarrow J$, $F \rightarrow M$.

Аналогом импульса является момент импульса. Понятие момента импульса также можно ввести относительно неподвижной точки и относительно неподвижной оси.

Момент импульса материальной точки \vec{L} относительно неподвижной точки О равен векторному произведению радиуса-вектора \vec{r} , проведенного из полюса О к данной материальной точке, на ее импульс \vec{p} :

$$\vec{L} = [\vec{r} \vec{p}] = [\vec{r} m \vec{v}].$$

Моментом импульса относительно неподвижной оси называется проекция вектора \vec{L} на эту ось.

Если материальная точка вращается вокруг неподвижной оси, то её момент импульса относительно этой оси по модулю равен

$$L_i = m_i v_i r_i,$$

где m_i - масса материальной точки, v_i - её линейная скорость r_i - расстояние до оси вращения.

Т.к. для вращательного движения $v_i = \omega r_i$,

$$L_i = m_i \omega r_i^2 = m_i r_i^2 \omega = J_i \omega,$$

$$\vec{L}_i = J_i \vec{\omega},$$

где $J_i = m_i r_i^2$ - момент инерции материальной точки относительно оси вращения.

Момент импульса твердого тела относительно неподвижной оси равен сумме моментов импульсов всех его точек относительно этой оси:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i J_i \vec{\omega} = \vec{\omega} \sum_i J_i = J \vec{\omega},$$

$$\vec{L} = J \vec{\omega}, \quad (1)$$

где $J = \sum J_i$ - момент инерции тела.

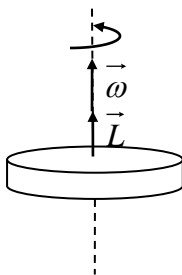


Рис.1

Т.о., момент импульса твердого тела относительно неподвижной оси вращения равен произведению его момента инерции относительно этой оси на угловую скорость и сонаправлен с вектором угловой скорости (рис.1).

Продифференцируем уравнение (1) по времени:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = J \frac{d\vec{\omega}}{dt} = J \vec{\varepsilon} = \vec{M}, \quad \text{или} \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (2)$$

Уравнение (2) - ещё одна форма основного уравнения динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси: производная момента импульса твердого тела относительно неподвижной оси вращения равна моменту внешних сил относительно той же оси.

5.2 Закон сохранения момента импульса.

Рассмотрим систему, состоящую из N тел, которые можно рассматривать как материальные точки.

В общем случае на каждое тело действуют как внешние, так и внутренние силы системы:

$$+ \begin{cases} \frac{d\vec{L}_1}{dt} = \vec{M}_{1\text{внешн}} + \vec{M}_{1\text{внутр}} \\ \dots \\ \frac{d\vec{L}_N}{dt} = \vec{M}_{N\text{внешн}} + \vec{M}_{N\text{внутр}} \end{cases}$$

$$\sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i \vec{M}_{i\text{внешн}} + \sum_i \vec{M}_{i\text{внутр}} \quad (3)$$

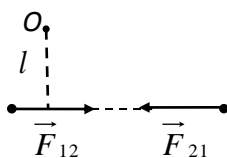


Рис. 2

Т.к. внутренние силы всегда попарно равны, противоположны по направлению и лежат вдоль одной прямой (рис. 2, ось O перпендикулярна плоскости чертежа), их плечи l одинаковы независимо от расположения оси вращения O , моменты этих сил относительно одной и той же оси так же всегда попарно равны и противоположны по направлению, поэтому $\sum \vec{M}_{\text{внутр}} = 0$.

$$\sum \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum \vec{L}_i = \frac{d\vec{L}}{dt},$$

где $\vec{L} = \sum \vec{L}_i$ - суммарный момент импульса всех тел системы (момент импульса системы).

Выражение (3) принимает вид:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_{\text{внешн}},$$

т.е. производная момента импульса системы материальных точек относительно какой-либо неподвижной оси равна суммарному моменту внешних сил относительно той же оси.

В частности, если для какой-то оси $\sum \vec{M}_{\text{внешн}} = 0$, $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const}$.

Это уравнение выражает **закон сохранения момента импульса системы материальных точек**: момент импульса системы относительно какой-либо неподвижной оси остается постоянным, если момент внешних сил относительно этой оси равен нулю.

Если система замкнута, $\sum \vec{F}_{внеш} = 0$, $\sum \vec{M}_{внеш} = 0$, $\vec{L} = const$, момент импульса замкнутой системы есть величина постоянная.

Если момент импульса сохраняется, то сохраняется и положение оси вращения тела, поэтому вращающееся тело при отсутствии внешних моментов устойчивее неподвижного. Это учитывается при изготовлении нарезного оружия, поскольку оно дает лучшую прицельность, чем гладкоствольное. Выпущенный из нарезного орудия снаряд вращается вокруг своей продольной оси и поэтому его полет является устойчивым.

Закон сохранения момента импульса был впервые сформулирован в 1746 г отечественным ученым Л.Эйлером.

5.3 Гирископ.

Гирископом называют симметричное массивное однородное тело, способное вращаться вокруг своей оси симметрии с большой угловой скоростью.

Вращающийся гирископ обладает рядом свойств.

1. Если гирископ закреплен так, что на него не действуют моменты внешних сил, то он называется свободным. Такой гирископ обладает важным свойством сохранять неизменным направление момента импульса \vec{L} . Ось уравновешенного гироскопа с 3-мя степенями свободы стремится сохранить в мировом пространстве свое первоначальное положение (следствие из закона сохранения момента импульса):

$$\text{т.к. } \sum \vec{M}_{внеш} = 0, \quad \vec{L} = J\vec{\omega} = const.$$

Это свойство позволяет использовать гирископ как указатель фиксированного направления в пространстве. Массивные гироскопы применяются в качестве стабилизаторов прямого действия (например, стабилизатор качки судов). Легкие гироскопы используются в качестве стабилизаторов непрямого действия; они выполняют роль чувствительного элемента, передающего сигналы двигателям привода соответствующих рулей. Гироскопы широко используются и в навигационных приборах (гироскопы, гироскопы, указатели поворотов и т.п., их достоинство - они не зависят от магнитных полей); для ориентации в космическом пространстве космических кораблей, для поддержания заданного направления движения транспортных средств (судно – авторулевой, самолет – автопилот и т.п.).

2. Гироскопический эффект обнаруживается, когда на ось гироскопа действует сила или пара сил, создающая вращающий эту ось момент сил (рис. 3).

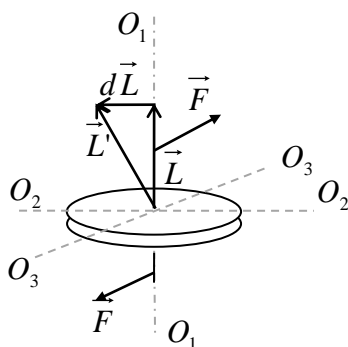


Рис. 3

$$\text{Т.к. } \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad d\vec{L} = \vec{M}dt, \quad \text{т.е. направления}$$

$d\vec{L}$ и \vec{M} совпадают.

За время dt момент импульса гироскопа \vec{L} получит приращение $d\vec{L} = \vec{M}dt$, тогда $\vec{L}' = \vec{L} + d\vec{L}$

Направление вектора \vec{L}' совпадает с новым направлением оси вращения.

Гироскопический эффект - свойство вращающегося гироскопа поворачиваться под действием сил вокруг оси O_3O_3 , перпендикулярной той оси O_2O_2 , вокруг которой он повернулся бы в отсутствии вращения.

Если время действия силы dt мало, $d\vec{L}$ - тоже мало, поэтому кратковременное действие сил не приводит к изменению ориентации оси вращения гироскопа в пространстве, для этого необходимо длительное воздействие силы.

Гироскопический эффект используется в различных гироскопических навигационных приборах (гироскопах, гирогоризонтах). Гироскопы в отличие от компасов с магнитной стрелкой не реагирует на наличие ферромагнитных предметов и на его показания не нужно вносить поправки на магнитное склонение, т.е. угол между магнитным и географическим меридианами.

Гироскопас представляет собой гироскоп, ось которого может свободно поворачиваться в горизонтальной плоскости. Под влиянием суточного вращения Земли ось гироскопа устанавливается в такое положение, при котором угол между этой осью и осью вращения Земли минимален, т.е. указывает на север.

3. Прецессия гироскопа - непрерывный поворот оси гироскопа вокруг некоторой оси под действием постоянного момента сил. Прецессия - движение оси вращения по круговому конусу (рис. 4).

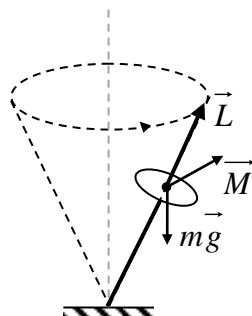


Рис. 4

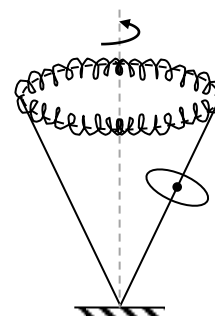


Рис. 5

4. Нутация гироскопа становится заметной при уменьшении его угловой скорости. При этом ось прецессирует не по окружности, а описывает сложную циклоидную кривую (рис. 5).

5.4 Работа и кинетическая энергия при вращательном движении.

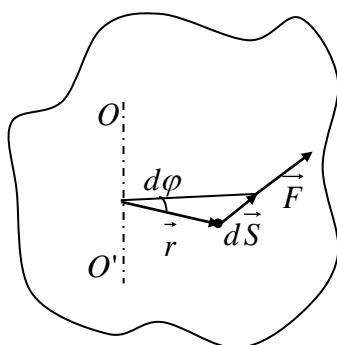


Рис. 6

Пусть за время dt тело поворачивается на угол $d\varphi$ (рис. 6), при этом точка проходит путь dS ; при малых углах $dS = r d\varphi$.

Предположим для упрощения вывода, что \vec{F} и $d\vec{S}$ сонаправлены, $\alpha = 0$ и $\vec{F} \perp \vec{r}$.

Физика

$$dA = FdS = Frd\varphi = Md\varphi,$$

$$A = \int_0^\varphi dA = \int_0^\varphi Md\varphi = M\varphi.$$

Работа при вращательном движении тела равна произведению момента вращающей силы на угол поворота тела.

Определим кинетическую энергию вращающегося тела.

$$v_i = \omega r_i, \quad W_{ki} = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \frac{J_i \omega^2}{2},$$

$$W_k = \sum W_{ki} = \sum \frac{J_i \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum J_i = \frac{J \omega^2}{2},$$

где $J_i = m_i r_i^2$ - момент инерции материальной точки;

$J = \sum_i J_i$ - момент инерции тела.

Пример: катящийся обруч.

$$W_k = W_{kn} + W_{kвр} = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mr^2\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = mv^2.$$

Лекция 6. Элементы механики жидкостей.

6.1 Давление жидкости и газа.

Молекулы газа, двигаясь хаотически, почти или вообще не связаны между собой силами взаимодействия, поэтому они движутся свободно и в результате соударений стремятся во все стороны, заполняя весь предоставленный им объем, т.е. объем газа определяется объемом того сосуда, который газ занимает.

Как и газ, жидкость принимает форму того сосуда, в котором находится, но среднее расстояние между молекулами остается практически постоянным, поэтому объем жидкости практически не меняется.

Хотя свойства жидкостей и газов во многом отличаются, в ряде механических явлений их поведение описывается одинаковыми параметрами и идентичными уравнениями. Поэтому гидроаэромеханика - раздел механики, в котором изучается движение жидкостей и газов, их взаимодействие с обтекаемыми ими твердыми телами, - использует единый подход к изучению жидкостей и газов.

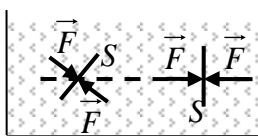


Рис. 1

Если в покоящуюся жидкость поместить тонкую пластинку (рис. 1), то части жидкости, находящиеся по разные стороны от нее, действуют на пластинку с силами \vec{F} , равными по модулю и направленными перпендикулярно площадке S независимо от ее ориентации, т.к. наличие касательных сил привело бы

частицы жидкости в движение.

Давление жидкости - это физическая величина, равная отношению нормальной силы, действующей со стороны жидкости на некоторую площадь, к этой площади.

$$p = \frac{F}{S}, \quad [p] = 1 \frac{H}{m^2} = 1 Pa.$$

1 Па равен давлению, создаваемому силой 1 Н, равномерно распределенной по нормальной к ней поверхности площадью 1 м².

Давление при равновесии жидкостей подчиняется **закону Паскаля**: давление, оказываемое внешними силами на жидкость (или газ), передается по всем направлениям без изменений.

Гидростатическое давление – давление, оказываемое столбом жидкости или газа (рис. 2)

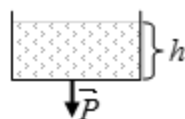


Рис. 2

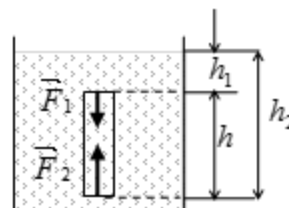


Рис. 3

$$p = \frac{P}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{\rho Vg}{S} = \frac{\rho h \cdot S \cdot g}{S} = \rho gh,$$

$p = \rho gh$ - гидростатическое давление.

Согласно полученной формуле, сила давления на нижние слои жидкости будет больше, чем на верхние (рис. 3), поэтому на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, определяемая законом Архимеда.

$$F_{\text{выт}} = F_2 - F_1 = p_2 \cdot S - p_1 \cdot S = \rho gh_2 S - \rho gh_1 S = \rho g S(h_2 - h_1) = \rho g Sh = \rho g V,$$

$$F_{\text{выт}} = \rho_{\text{ж}} g V_{\text{погр}},$$

$$F_{\text{выт}} = \rho_{\text{ж}} g V = m_{\text{ж}} g = P_{\text{ж}}.$$

Закон Архимеда: на тело, погруженное в жидкость (или газ) действует выталкивающая сила, направленная вертикально вверх и равная весу жидкости, вытесненной телом.

Подъемной силой называют разность между выталкивающей силой и силой тяжести:

$$F_{\text{под}} = F_{\text{выт}} - mg.$$

6.2 Уравнение неразрывности. Уравнение Бернулли.

Уравнение неразрывности.

Идеальная жидкость - это абстрактная жидкость, не обладающая вязкостью, теплопроводностью, способностью к электризации и намагничиванию.

Такое приближение допустимо для маловязкой жидкости. Течение жидкости называется стационарным, если вектор скорости в каждой точке пространства остается постоянным.

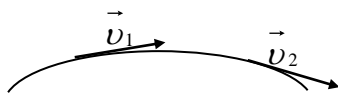


Рис. 4

Графически движение жидкостей изображается с помощью линий тока.

Линии тока жидкости - это линии, в каждой точке которых вектор скорости частиц жидкости направлен по касательной (рис. 4).

Линии тока проводят так, чтобы число линий, проведенных через некоторую единичную площадку, перпендикулярную потоку, было численно равно или пропорционально скорости жидкости в данном месте.

Часть жидкости, ограниченная линиями тока, называется **трубкой тока**.

Т.к. скорость частиц жидкости направлена по касательной к стенкам трубки тока, частицы жидкости не выходят из трубки тока, т.е. трубка может рассматриваться как жесткая конструкция. Трубки тока могут сужаться или расширяться в зависимости от скорости жидкости, хотя масса жидкости, протекающей через любое сечение, перпендикулярное ее течению, за определенный промежуток времени будет постоянной.

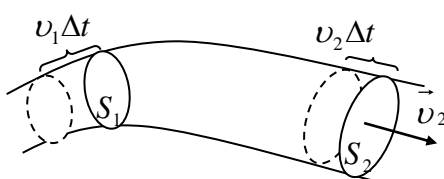


Рис. 5

Т.к. жидкость несжимаема, через S_1 и S_2 пройдет за Δt одинаковая масса жидкости (рис. 5):

$$\Delta m_1 = \Delta m_2.$$

$$\Delta m = \rho \Delta V = \rho S v \Delta t,$$

$$\rho S_1 v_1 \Delta t = \rho S_2 v_2 \Delta t,$$

$v_1 S_1 = v_2 S_2$, $vS = \text{const}$ - уравнение неразрывности струи или теорема Эйлера.

Произведение скорости течения несжимаемой жидкости и площади поперечного сечения одной и той же трубки тока постоянно.

Теорема о неразрывности широко применяется при расчетах, связанных с подачей жидкого топлива в двигатели по трубам переменного сечения.

Уравнение Бернулли.

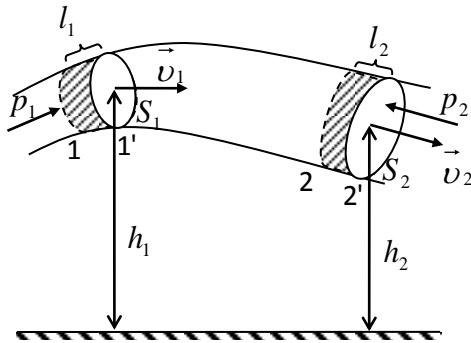


Рис. 6

Пусть жидкость движется в поле сил тяжести так, что в данной точке пространства величина и направление скорости жидкости остаются постоянными. Такое течение называется стационарным. В стационарно текущей жидкости кроме сил тяжести действуют еще и силы давления. Выделим в стационарном потоке участок трубки тока, ограниченный сечениями S_1 и S_2 (рис.6)

За время Δt этот объем переместится вдоль трубки тока, причем сечение S_1 переместится в положение $1'$, пройдя путь l_1 , а S_2 - в положение $2'$, пройдя путь l_2 . В силу неразрывности струи выделенные объемы (и их массы) одинаковы:

$$V_1 = V_2 = V, \quad m_1 = m_2 = \rho V.$$

Энергия каждой частицы жидкости складывается из ее кинетической и потенциальной энергий в поле сил земного тяготения. Вследствие стационарности течения частица, находящаяся через Δt в любой из точек незаштрихованной части рассматриваемого объема, имеет такую же скорость, и, следовательно W_k , какую имела частица, находившаяся в той же точке в начальный момент времени. Поэтому изменение энергии всего рассматриваемого объема можно вычислить как разность энергий заштрихованных объемов V_1 и V_2 .

Возьмем сечение трубки тока и отрезки l_1 , l_2 настолько малыми, чтобы всем точкам каждого из заштрихованных объемов можно было приписать одно и то же значение скорости, давления и высоты. Тогда приращение энергии равно

$$\Delta W = (W_{k2} + W_{p2}) - (W_{k1} + W_{p1}) = \left(\frac{\rho V v_2^2}{2} + \rho V g h_2 \right) - \left(\frac{\rho V v_1^2}{2} + \rho V g h_1 \right)$$

В идеальной жидкости трение отсутствует, поэтому ΔW должно равняться работе, совершенной над выделенным объемом силами давления:

$$A = F_1 l_1 - F_2 l_2$$

(\vec{F}_2 отрицательна, т.к. направлена в сторону, противоположную перемещению l_2).

$$F_1 = p_1 S_1,$$

$$F_2 = p_2 S_2,$$

$$A = p_1 S_1 l_1 - p_2 S_2 l_2 = p_1 V_1 - p_2 V_2 = p_1 V - p_2 V = V(p_1 - p_2),$$

$$\Delta W = A,$$

$$\frac{\rho V v_2^2}{2} + \rho V g h_2 - \frac{\rho V v_1^2}{2} - \rho V g h_1 = V(p_1 - p_2).$$

Сократим на V и перегруппируем члены:

$$\frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 = \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1.$$

Сечения S_1 и S_2 были выбраны произвольно, поэтому можно утверждать, что в любом сечении трубки тока

$$\frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 = \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1. \quad (1)$$

Выражение (1) представляет собой уравнение Бернулли. В стационарно текущей идеальной жидкости вдоль любой линии тока выполняется условие (1).

Для горизонтальной линии тока $h_1 = h_2$, $\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const}$.

Уравнение Бернулли достаточно хорошо выполняется для реальных жидкостей, внутреннее трение в которых не очень велико. Уменьшение давления в точках, где скорость потока больше, положено в основу устройства водоструйного насоса.

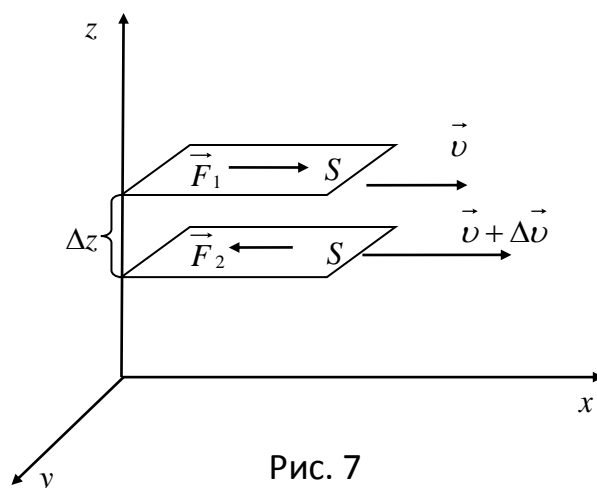
Выводы этого уравнения учитываются при расчетах конструкций насосов систем подачи жидкого топлива в двигатели.

6.3 Вязкость (внутреннее трение). Ламинарный и турбулентный режимы течения жидкостей.

Сила внутреннего трения.

Вязкостью жидкостей и газов называется их свойство оказывать сопротивление перемещению одних слоев относительно других.

Вязкость обусловлена возникновением сил внутреннего трения между слоями движущихся жидкостей и газов. Эти силы направлены по касательной к поверхности слоев, они тормозят более быстрые слои и ускоряют медленные (рис.7).



Уравнение гидродинамики вязкой жидкости было установлено Ньютоном в 1687 г.

$$F_{\square} = \eta \left| \frac{\Delta v}{\Delta z} \right| S \quad - \quad \text{модуль силы}$$

внутреннего трения

Градиент скорости $\frac{\Delta v}{\Delta z}$ показывает, как быстро меняется скорость при переходе от слоя к слою в направлении z , перпендикулярном направлению движения слоев.

$$\eta = \frac{F_{\square}}{\left| \frac{\Delta v}{\Delta z} \right| S} \quad - \quad \text{вязкость или динамическая вязкость,}$$

$$[\eta] = \frac{H}{\frac{M}{M \cdot c} \cdot M^2} = \frac{H}{M^2} \cdot c = \text{Па} \cdot \text{с}.$$

Коэффициент η численно равен силе внутреннего трения, действующей на единицу площади поверхности раздела параллельно движущихся слоев при градиенте скорости равном 1.

Величина η зависит от молекулярного строения вещества и температуры:

У газов с ростом температуры η увеличивается, т.к. возрастают скорости движения молекул и усиливается их взаимодействие. В результате возрастает обмен молекулами между движущимися слоями газа, которые переносят импульс от слоя к слою. Поэтому медленные слои ускоряются, а быстрые замедляются, η - увеличивается.

У жидкостей с ростом температуры ослабевает межмолекулярное взаимодействие и увеличивается расстояние между молекулами, η уменьшается.

Вязкость жидкостей и газов определяют с помощью вискозиметров.

От величины вязкости топлива зависит скорость его течения по трубопроводу, а также величина теплоотдачи жидкости или газа стенкам трубопровода, поэтому вязкость топлива и охладителей учитывается при конструировании систем подачи топлива и охлаждающих систем двигателей.

Ламинарный и турбулентный режимы течения.

В зависимости от скорости потока течение жидкости или газа может быть ламинарным или турбулентным.

Ламинарное течение (от лат. «ламина» - полоска) - течение, при котором жидкость или газ перемещаются слоями, параллельными направлению течения, причем это слои не перемешиваются друг с другом.

Ламинарное течение стационарно, бывает либо при большой η , либо при малой \vec{v} .

Турбулентным называется течение, при котором в жидкости (или газе) образуются многочисленные вихри различных размеров, вследствие чего давление, плотность и скорость течения непрерывно изменяется.

Турбулентное течение нестационарно, преобладает на практике.

Лекция 7. Элементы релятивистской механики.

7.1 Принцип относительности и преобразования Галилея.

Галилей установил, что законы механики во всех инерциальных системах отсчета (ИСО) имеют одинаковую форму. Для доказательства этого рассмотрим две ИСО: условно неподвижную систему K (с координатами x, y, z) и систему K' (с координатами x', y', z'), движущуюся равномерно прямолинейно со скоростью \vec{v} относительно оси OX первой системы (рис. 1).

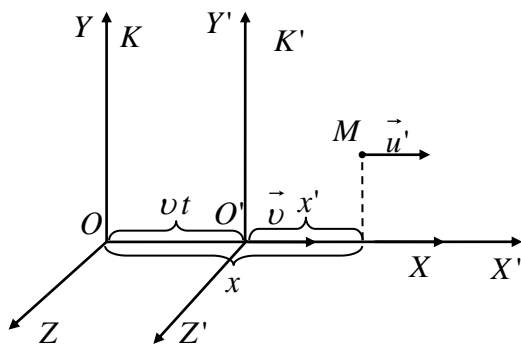


Рис. 1

В системе K' точка M движется со скоростью \vec{u}' относительно K' . Положение точки M в K определяют координаты (x, y, z) , в K' - (x', y', z') .

Если отсчет времени начать с того момента, когда начала координат O и O' совпадают, то преобразования, описывающие переход от одной ИСО к другой, следующие:

$$\left. \begin{aligned} x &= x' + vt' \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned} \right\} \text{ - преобразования Галилея}$$

В классической механике предполагается, что ход времени не зависит от относительного движения системы отсчета, поэтому к преобразованиям координат добавлено соотношение $t=t'$.

Записанные соотношения справедливы только при $v \ll c$.

Продифференцируем их по времени:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v \quad \text{или} \quad u_x = u'_x + v,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} \quad \text{или} \quad u_y = u'_y,$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} \quad \text{или} \quad u_z = u'_z.$$

Полученные три скалярные соотношения эквивалентны следующему векторному соотношению:

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v},$$

где \vec{u} - скорость точки M относительно системы отсчета K . Это соотношение представляет собой правило сложения скоростей в классической механике. Продифференцируем его по времени:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{u}'}{dt}, \text{ т.е. } \vec{a} = \vec{a}'.$$

Т.к. масса не зависит от скорости,

$$\vec{F} = m\vec{a}, \vec{F}' = m\vec{a}, \vec{F} = \vec{F}'.$$

Т.о., очевидно, что \vec{a}, \vec{F} и второй закон Ньютона инвариантны относительно преобразований Галилея. Подобный анализ можно провести и для других законов механики и получить такой же результат.

Следовательно, уравнения (или законы) механики не изменяются (инвариантны) при переходе от одной ИСО к другой.

Принцип относительности Галилея: все механические явления протекают во всех ИСО одинаково.

Практически это проявляется в том, что никакими механическими опытами, проведенными в пределах данной ИСО, невозможно установить, покоится данная ИСО или движется равномерно прямолинейно.

7.2 Постулаты специальной теории относительности.

В классической механике предполагалась очевидная независимость времени от системы отсчета. Отражением этого является 4-е уравнение в преобразованиях Галилея. Оно отражает идею о том, что существует единое, абсолютное время, не связанное с абсолютным пространством. Ньютон считал, что существует абсолютное пространство и абсолютное время. Абсолютное пространство определялось им как безотносительное к чему-либо внешнемуместилище вещей, остающееся всегда одинаковым и неподвижным. О времени Ньютон писал: «Абсолютное, истинное или математическое время само по себе и в силу своей внутренней природы, течет равномерно, безотносительно к чему-либо внешнему».

В действительности же пространство и время неотделимы от движущейся материи и друг от друга. А.Эйнштейном были пересмотрены ньютоновские представления о пространстве и времени и заложены основы специальной теории относительности. Эта теория представляет собой современную физическую теорию пространственно-временных отношений движущейся материи, в которой предполагается, что время однородно, а пространство однородно и изотропно.

Однородность времени проявляется в том, что законы движения замкнутой системы не зависят от начала отсчета времени.

Однородность пространства проявляется в том, что законы движения замкнутой системы не зависят от выбора положения начала координат ИСО.

Изотропность - одинаковые свойства по различным направлениям.

Специальная теория относительности (СТО) часто называется релятивистской теорией, а специфические явления, ею описываемые - релятивистскими эффектами (они проявляются при $v \rightarrow c$).

СТО стала основой новых отраслей науки и техники: физики элементарных частиц, ускорительной техники, ядерной энергетики.

Основой СТО являются два постулата, сформулированные Эйнштейном в 1905 г.

✓ **Принцип относительности** (Эйнштейн распространил принцип относительности Галилея на все физические явления): все физические явления во всех ИСО протекают одинаково; или: все физические законы инвариантны относительно всех ИСО.

✓ **Принцип постоянства скорости света:** скорость света в вакууме не зависит от скорости движения источника света или наблюдателя, одинакова во всех ИСО и является предельной.

Опыты показывают, что скорость любых частиц и тел, а также скорость распространения любых взаимодействий и сигналов не может превосходить «с». Т.о. скорость света в вакууме является максимально возможной в природе скоростью передачи сигналов, одинаковой по всем направлениям во всех ИСО. Согласно II постулату, постоянство скорости света - фундаментальное свойство природы, которое констатируется как опытный факт.

СТО установила новые пространственно-временные представления, такие, например, как относительность длин и промежутков времени, относительность одновременности событий. Это и другие следствия из СТО находят надежное экспериментальное подтверждение.

7.3 Преобразования Лоренца и следствия из них.

В 19 веке Максвелл подытожил многочисленные исследования явлений электричества, магнетизма и света в своих уравнениях, которые сводят воедино все эти явления. Однако уравнения Максвелла не были инвариантны относительно преобразований Галилея, их вид изменялся в движущейся СО относительно неподвижной СО (т.е. в движущемся космическом корабле электромагнитные и световые явления не такие, как в неподвижном). Уравнения Максвелла пытались видоизменять и подгонять к тому, чтобы они не отличались от преобразований Галилея. Однако после многочисленных неудачных попыток стало ясно, что уравнения Максвелла правильны, а загвоздка в чем-то другом.

Между тем, Лоренц заметил, что когда он делал в уравнениях Максвелла подстановку:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= y & y &= y' \\ z' &= z & z &= z' \\ t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & t &= \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \end{aligned} \quad (1)$$

то форма уравнений Максвелла после такой подстановки не изменилась. Эти формулы (1) теперь называют **преобразованиями Лоренца**. Они имеют простейший вид (1) в том случае, когда сходственные оси декартовых координат неподвижной (K) и движущейся (K') ИСО попарно параллельны, причем K'

движется относительно К с постоянной скоростью \vec{v} вдоль ОХ, а в качестве начала отсчета времени выбран тот момент, когда начала координат О и О' обеих систем совпадают.

При $v \ll c$ преобразования (1) переходят в преобразования Галилея (в этом заключается суть принципа соответствия), которые являются частным случаем преобразований (1). Следовательно, классическая механика представляет собой частный случай более общей теории - релятивистской механики.

Релятивистской механикой называется механика движений с релятивистскими скоростями, основанная на преобразованиях (1) и постулатах Эйнштейна. (relativus - относительный, лат.).

Эйнштейн предположил, что все физические законы не должны меняться от преобразований Лоренца, т.е. уравнения, выражающие законы, должны сохранять свою форму при переходе от одной ИСО к другой, осуществляемом в соответствии с преобразованиями (1).

Как видно из (1), при переходе от К к К' изменяются не только пространственные координаты, но и соответствующие им моменты времени. Однако, между пространственными координатами x', y', z' события и временем t' его совершения в произвольной ИСО существует взаимосвязь, так что величина

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - c^2(t')^2$$

не зависит от скорости v системы К', т.е. одинакова во всех ИСО:

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - c^2(t')^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2.$$

Т.о. теория Эйнштейна оперирует не с трехмерным пространством, к которому присоединяется понятие времени, а рассматривает неразрывно связанные пространственные и временные координаты, образующие четырехмерное пространство.

Релятивистский закон сложения скоростей.

Найдем закон сложения скоростей в СТО.

Пусть материальная точка М движется равномерно прямолинейно со скоростью \vec{u}' вдоль оси О'Х' системы К', которая движется вдоль ОХ системы К со скоростью \vec{v} . Найдем скорость точки М относительно системы К (рис.1).

С помощью преобразований (1) выразим dx и dt :

$$dx = \frac{dx' + vdt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2}dx'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + vdt'}{dt' + \frac{v}{c^2}dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot \frac{dx'}{dt'}} = \frac{u' + v}{1 + \frac{v \cdot u'}{c^2}} \quad - \text{ релятивистский закон сложения}$$

скоростей,

$$\text{где } \frac{dx'}{dt'} = u'.$$

$$\text{При } v \ll c \quad u = u' + v,$$

$$\text{если } v = u' = c, \quad u = \frac{c+c}{1+\frac{c^2}{c^2}} = \frac{2c}{2} = c.$$

Экспериментальное доказательство независимости «с» от скорости движения источника было получено при измерении скорости излучения γ -квантов высоких энергий, возникающих при распаде нейтральных пионов, происходящем при скорости их движения $v \approx 0,99975 c$.

Одновременность событий в разных системах отсчета.

Пусть в системе К в точках с координатами x_1 и x_2 в моменты времени t_1 и t_2 происходят два события. В системе К' им соответствуют x'_1 и x'_2 и моменты времени t'_1 и t'_2 .

Если события в системе К происходят в одной точке ($x_1=x_2=x$) и являются одновременными ($t_1=t_2=t$), то, согласно преобразованиям Лоренца,

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow x'_1 = x'_2, \quad t'_1 = t'_2,$$

т.е. эти события являются одновременными и пространственно совпадающими в любой ИСО.

Если события в системе К пространственно разобщены ($x_1 \neq x_2$), но одновременны ($t_1=t_2=t$), то в системе К'

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x'_2 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t'_1 = \frac{t - \frac{vx_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t'_2 = \frac{t - \frac{vx_2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow x'_1 \neq x'_2, \quad t'_1 \neq t'_2,$$

они также пространственно разобщены и оказываются неодновременными.

Знак разности ($t'_2 - t'_1$) определяется знаком выражения $v(x_1 - x_2)$, поэтому в различных точках системы К' может быть разным. Следовательно, в одних СО первое событие может предшествовать второму, а в других СО - наоборот. Сказанное выше относится лишь к событиям, между которыми отсутствует причинно-следственная связь. Причинно связанные события ни в одной из СО не будут одновременными и во всех ИСО причина будет предшествовать следствию.

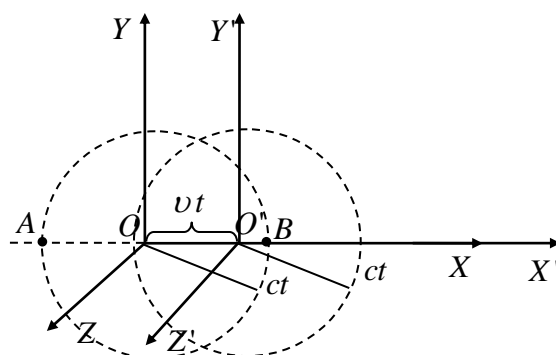


Рис. 2

Рассмотрим пример. Пусть в момент начала отсчета времени, когда О и О' совпадают, в точке производится мгновенная вспышка света. К моменту t свет в К достигнет точек сферы радиусом ct (рис. 2). В системе К' к моменту $t'=t$ свет достигнет точек сферы того же радиуса ct , но с центром в точке О', находящейся в это время на

расстоянии vt от точки О.

Достижение световой вспышкой точек А и В - события, одновременные в системе К. В системе К' это события не одновременны. В точку А, удаляющуюся от источника световой вспышки - точки О'- свет попадет позже, чем в точку В, приближающуюся к О'.

Длительность событий в разных системах отсчета.

Пусть в К' два события происходят в одной и той же точке ($x'_1 = x'_2 = x'$), неподвижной относительно К' в моменты времени t'_1 и t'_2 , так что промежуток времени между этими событиями $\tau_0 = t'_2 - t'_1$.

В системе К:

$$t_2 = \frac{t'_2 + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, t_1 = \frac{t'_1 + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \tau = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \tau_0 < \tau.$$

Промежуток времени между двумя событиями (длительность события) минимален в той ИСО, относительно которой оба события совершаются в одной и той же точке.

Время, измеряемое по часам, движущимся вместе с данным объектом (т.е. для которых $x'_1 = x'_2$), называется собственным временем этого объекта. Собственное время - минимальное (самое короткое).

Т. о. течение времени и все процессы в системе К' замедляются с точки зрения неподвижного наблюдателя, находящегося в системе К - релятивистский эффект замедления хода времени. Релятивистский эффект замедления времени является совершенно реальным и экспериментально подтверждается при изучении нестабильных элементарных частиц. Пример - попадание на Землю μ -мезонов, собственное время жизни которых $\tau_0 \approx 2 \cdot 10^{-6}$ с. Они возникают в верхних слоях атмосферы под действие космических лучей на высоте ≈ 20 -30 км и не должны были бы достигать поверхности Земли ($S = vt = 3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 600$ м), $v \approx c$.

С точки зрения земного наблюдателя $\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ - его время жизни значительно

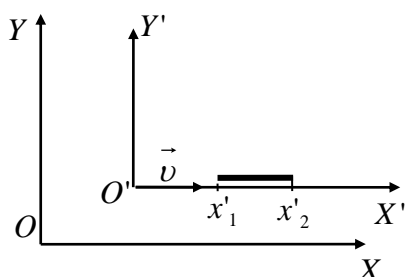


Рис. 3

больше, так что он успевает достигнуть поверхности Земли и быть зарегистрирован земными приборами.

Длина тел в разных системах отсчета.

Рассмотрим стержень, расположенный вдоль О'Х' и покоящийся относительно К' (рис. 3). Его длина в К' $l_0 = x'_2 - x'_1$, где x'_1, x'_2 - не изменяющиеся во времени t' координаты его концов.

Относительно К он движется со скоростью \vec{v} . Для определения его длины в К нужно отметить координаты его концов x_1, x_2 в один и тот же момент времени $t_1 = t_2 = t$ и найти их разность: $l = x_2 - x_1$.

Согласно преобразований Лоренца,

$$x'_2 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad l_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Следовательно, длина стержня l , измеренная в системе отсчета, относительно которой он движется, оказывается меньше длины l_0 , измеренной в системе, относительно которой он покоится. В направлении осей OY и OZ его размеры одинаковы во всех ИСО.

Т.о. у движущихся тел их размеры в направлении движения сокращаются тем больше, чем больше скорость движения (релятивистское сокращение длины).

7.4 Основной закон релятивистской динамики.

Закон взаимосвязи массы и энергии.

Эйнштейн обнаружил, что классические законы сохранения энергии и импульса несовместимы с преобразованиями Лоренца. Он предположил, что если ввести новое определение импульса как

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

то законы сохранения будут выполняться. Были проведены многочисленные точные проверки и новые законы сохранения импульса и энергии в формулировке Эйнштейна оказались справедливы.

Закон сохранения релятивистского импульса: релятивистский импульс замкнутой системы не изменяется с течением времени.

Если $\sum \vec{F}_i = 0$, то $\sum \vec{p}_i = \text{const}$.

Основной закон релятивистской динамики: скорость изменения релятивистского импульса материальной точки равна силе, действует на эту точку,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

Можно доказать, что кинетическая энергия релятивистской частицы выражается формулой

$$E_k = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right),$$

т.е. представляет собой разность двух

$$E_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 = E - E_0.$$

Величина, определяемая формулой

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

полная энергия свободной частицы, т.е. частицы, на которую не действуют силы. Величина, определяемая выражением

$$E_0 = mc^2,$$

получила название энергии энергии покоя.

В полную энергию E и энергию покоя E_0 не входит потенциальная энергия тела во внешнем силовом поле; величина E в разных системах отсчета различна. Значения m и E_0 не зависят от выбора ИСО.

При скоростях $v \ll c$ выражение для E_k переходит в формулу $E_k = \frac{mv^2}{2}$.

Докажем это.

В соответствии с формулой бинома Ньютона при

$$a = \frac{v^2}{c^2} \ll 1 \quad (1+a)^n = 1 + na + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2 + \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}, \text{ тогда}$$

$$W_k = mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - 1\right) = mc^2 \cdot \frac{v^2}{c^2} = \frac{mv^2}{2}.$$

Релятивистское соотношение между полной энергией и импульсом:

$$E = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}.$$

Важнейшим результатом СТО является универсальное соотношение между энергией покоя тела и его массой $E_0 = mc^2$.

Всякое изменение массы тела сопровождается изменением энергии покоя и наоборот:

$$\Delta E_0 = \Delta mc^2.$$

Это утверждение называют **законом взаимосвязи массы и энергии**. Закон подтвержден экспериментально (выделение энергии при ядерных реакциях). Энергия покоя может перейти в любой другой вид энергии и является в этом смысле «резервуаром» энергии.

Пример: при аннигиляции частицы и античастицы вся энергия покоя частиц переходит в энергию гамма-квантов – энергию электромагнитного поля.

Энергия покоя, соответствующая массе $m=1$ г любого вещества, выражается огромной цифрой: $E_0 = mc^2 = 1 \cdot 10^{-3} \cdot 9 \cdot 10^{16} = 9 \cdot 10^{13}$ Дж.

Мы не замечаем наличие у тел столь большой энергии покоя потому, что практически для всех процессов, за исключением ядерных, она остается величиной постоянной.

В теории относительности заключена фундаментальная связь пространства и времени друг с другом и движущимся телом. В преобразованиях Лоренца пространство и время входят равноправным образом, они зависят друг от друга и

Физика

от скорости движения тела. По современным научным представлениям пространство и время объединяются в единый пространственно-временной континуум.

Лекция 8. Свободные незатухающие и затухающие механические колебания

8.1 Гармонические колебания и их характеристики.

Колебаниями называются процессы, которые характеризуются определенной повторяемостью во времени, т.е. колебания - периодические изменения какой-либо величины.

В зависимости от физической природы различают механические и электромагнитные колебания. В зависимости от характера воздействия на колеблющуюся систему различают свободные (или собственные) колебания, вынужденные колебания, автоколебания и параметрические колебания.

Колебания называются периодическими, если значения всех физических величин, изменяющихся при колебаниях системы, повторяются через равные промежутки времени.

Период - это время, за которое совершается одно полное колебание:

$$T = \frac{t}{N}, \quad [T] = 1с,$$

где N - число колебаний за время t .

Частота колебаний - число полных колебаний, совершенных за единицу времени.

$$\nu = \frac{N}{t}, [\nu] = \frac{1}{с} = Гц,$$

$$T = \frac{1}{\nu}, \quad \nu = \frac{1}{T}.$$

Циклическая или круговая частота - число полных колебаний, совершенных за время 2π (единиц времени):

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}.$$

Простейшим типом колебаний являются **гармонические колебания**, при которых изменение величины происходит по закону синуса или косинуса (рис.1):

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где x - значение изменяющейся величины;

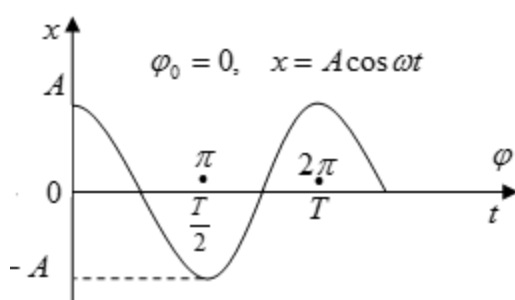


Рис.1

$A = x_{\max}$ - амплитуда колебаний, максимальное значение изменяющейся величины;

$\varphi = \omega t + \varphi_0$ - фаза колебаний в момент времени t (угловая мера времени);

φ_0 - начальная фаза, определяет значение x в начальный момент времени при $t = 0$, $[\varphi] = 1 \text{ рад}$.

Физика

Колебательная система, совершающая гармонические колебания, называется гармоническим осциллятором.

Скорость и ускорение при гармонических колебаниях:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0), \quad v_{\max} = A\omega,$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad a_{\max} = A\omega^2.$$

8.2 Свободные незатухающие механические колебания.

Свободными или собственными называются колебания, которые совершает система около положения равновесия после того, как она каким-либо образом была выведена из состояния устойчивого равновесия и представлена самой себе.

Как только тело (или система) выводится из положения равновесия, сразу же появляется сила, стремящаяся вернуть тело в положение равновесия. Эта сила называется **возвращающей**, она всегда направлена к положению равновесия, происхождение ее различно:

а) для пружинного маятника - сила упругости;

б) для математического маятника - составляющая сила тяжести.

Свободные или собственные колебания - это колебание, происходящее под действием возвращающей силы.

Если в системе отсутствуют силы трения, колебания продолжаются бесконечно долго с постоянной амплитудой и называются собственными незатухающими колебаниями.

Пружинный маятник - материальная точка массой m , подвешенная на абсолютно упругой невесомой пружине и совершающая колебания под действием упругой силы.

Рассмотрим динамику собственных незатухающих колебаний пружинного маятника.

$$\vec{F}_{\text{уп}} = m\vec{a} \text{ - по II закону Ньютона,}$$

$$\vec{F}_{\text{уп}} = -k\vec{x} \text{ - по закону Гука,}$$

$$\text{где } k \text{ - жесткость, } a = \frac{d^2x}{dt^2};$$

$$-kx = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \text{или} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

$$\text{Обозначим } \frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \omega_0 \text{ - циклическая частота собственных колебаний.}$$

$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x = 0$ - **дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаний.**

Решением этого уравнения является выражение: $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$.

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \text{ - период колебаний пружинного маятника.}$$

Физика

Рассмотрим превращение энергии:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0), \quad E_{k \max} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2};$$

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0), \quad E_{p \max} = \frac{kA^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2},$$

$$\text{т.к.} \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2 \rightarrow k = m\omega_0^2,$$

$$E = E_k + E_p = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{mA^2\omega_0^2}{2},$$

$$E = E_k + E_p = E_{k \max} = E_{p \max}.$$

При гармонических колебаниях полная энергия системы остается постоянной, происходит непрерывный переход E_k в E_p и наоборот.

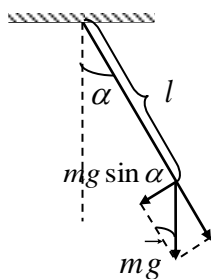


Рис.2

Математический маятник - материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити (рис.2).

Основной закон динамики вращения (II закон Ньютона):

$$\varepsilon = \frac{M}{J}, \quad \varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad J = ml^2, \quad M = -mg \sin \alpha \cdot l$$

Знак «минус» обусловлен тем, что $mg \sin \varphi$ аналогична квазиупругой силе, стремящейся вернуть маятник в положение равновесия.

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{mgl \sin \alpha}{ml^2},$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \alpha = 0.$$

Обозначим $\frac{g}{l} = \omega_0^2$. При малых углах $\sin \alpha \approx \alpha$.

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \alpha = 0, \quad \alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Пружинный и математический маятники являются гармоническими осцилляторами (как и колебательный контур). Гармоническим осциллятором называется система, описываемая уравнением:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \alpha = 0.$$

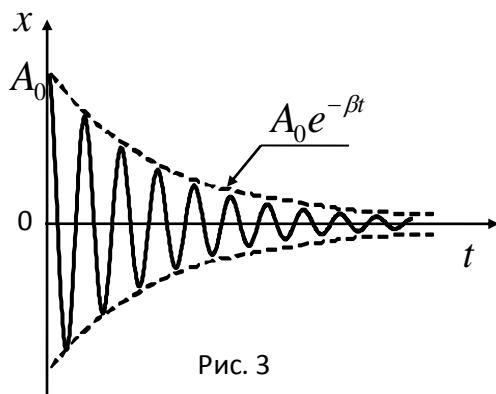


Рис. 3

Колебания гармонического осциллятора являются важным примером периодического движения и служат приближенной моделью во многих задачах классической и квантовой физики.

Во всякой реальной системе, совершающей механические колебания, всегда действуют те или иные силы сопротивления (трение в точке подвеса,

сопротивление окружающей среды и т.п.), на преодоление которых система затрачивает энергию, вследствие чего реальные свободные механические колебания всегда являются затухающими.

8.3 Свободные затухающие механические колебания.

Затухающие колебания - это колебания, амплитуда которых убывает со временем.

Найдем закон изменения амплитуды.

Для пружинного маятника массой m , совершающего малые колебания под действием упругой силы $\vec{F}_{уп} = -k\vec{x}$, сила трения пропорциональна скорости:

$$\vec{F}_{мп} = -r\vec{v}, \quad F_{мп} = -r \frac{dx}{dt},$$

где r - коэффициент сопротивления среды; знак минус означает, что $\vec{F}_{мп}$ всегда направлена противоположно скорости.

Согласно II закону Ньютона уравнение движения маятника имеет вид:

$$\vec{F}_{уп} + \vec{F}_{мп} = m\vec{a},$$

$$-kx - r \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0.$$

$$\text{Обозначим: } \frac{r}{m} = 2\beta, \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 - \text{дифференциальное уравнение свободных}$$

затухающих колебаний.

Решением этого уравнения является выражение:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0),$$

Где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ - циклическая частота свободных затухающих колебаний,

ω_0 - циклическая частота свободных незатухающих колебаний,

β - коэффициент затухания,

A_0 - амплитуда в начальный момент времени ($t=0$).

$A = A_0 e^{-\beta t}$ - закон убывания амплитуды.

С течением времени амплитуда убывает по экспоненциальному закону (рис. 3).

Время релаксации τ - это время, за которое амплитуда уменьшается в e раз.

$$\frac{A_0}{A_0 e^{-\beta \tau}} = e, \quad e^{\beta \tau} = e^1, \quad \beta \tau = 1, \quad \beta = \frac{1}{\tau}.$$

Таким образом, β есть величина, обратная времени релаксации.

Важнейшей характеристикой затухающих колебаний является логарифмический декремент затухания θ .

Логарифмическим декрементом затухания называется натуральный логарифм отношения двух амплитуд, отличающихся друг от друга по времени на период:

$$\theta = \ln \frac{A_0}{A_0 e^{-\beta T}} = \ln e^{\beta T} = \beta T.$$

Выясним его физический смысл.

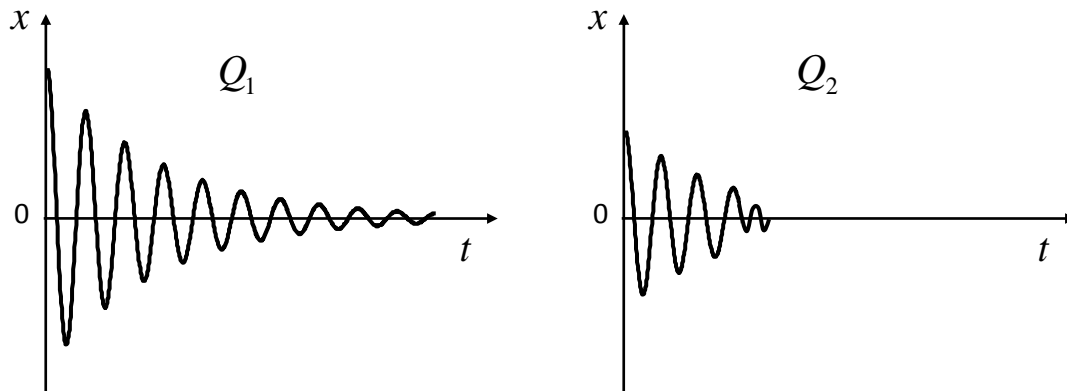


Рис. 4

За время релаксации система успеет совершить N колебаний:

$$N = \frac{t}{T} = \frac{\tau}{T},$$

$$\theta = \beta T = \frac{1}{\tau} T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N},$$

т.е. θ - это величина, обратная числу колебаний, в течение которых амплитуда уменьшается в e раз.

Для характеристики колебательной системы используют понятие добротности:

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \pi N.$$

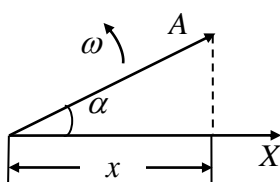
Добротность - физическая величина, пропорциональная числу колебаний, в течение которых амплитуда уменьшается в e раз (рис. 4, $Q_1 > Q_2$).

8.4 Сложение гармонических колебаний

Колеблющееся тело может участвовать в нескольких колебательных процессах, тогда необходимо найти результирующее колебание, иными словами, колебания необходимо сложить.

Гармонические колебания изображаются графически методом вращающегося вектора амплитуды или методом векторных диаграмм.

Изображение гармонических колебаний графически в виде вектора на плоскости называется векторной диаграммой (рис. 5).



$$x = A \cos(\omega t + \alpha),$$

где α - начальная фаза колебания.

Рис. 5

1. Сложение колебаний одного направления.

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1), \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2).$$

Представим оба колебания с помощью векторов \vec{A}_1 и \vec{A}_2 . Построим по правилам сложения векторов результирующий вектор \vec{A} (рис.6).

$$x = x_1 + x_2, \quad x = A \cos(\omega t + \alpha).$$

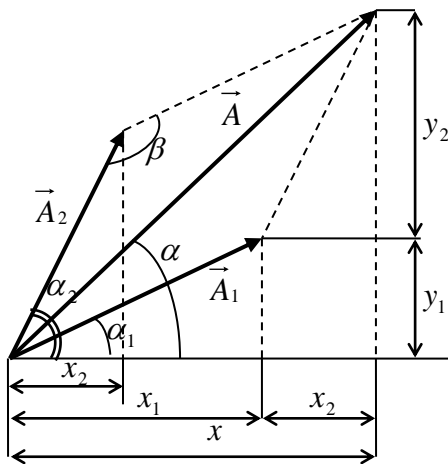


Рис. 6

При сложении 2-х гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты возникает гармоническое колебание того же направления и той же частоты.

$$\beta = \pi - (\alpha_2 - \alpha_1)$$

Согласно теореме косинусов:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos[\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)] = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1),$$

$$\tan \alpha = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2};$$

а) если $\alpha_2 - \alpha_1 = 2k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), $A = A_1 + A_2$ – в фазе (рис. 7а);

б) если $\alpha_2 - \alpha_1 = (2k + 1)\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), $A = A_1 - A_2$ – в противофазе (рис. 7б).

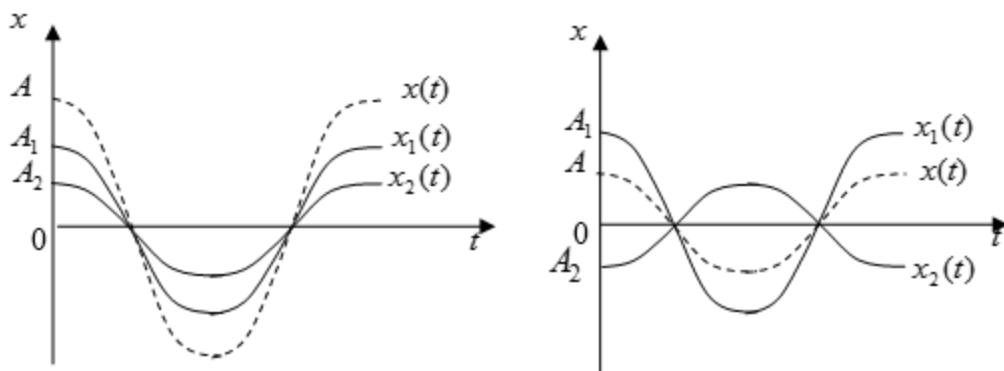


Рис. 7

Таким образом, тело, участвуя в двух гармонических колебаниях одного направления и одинаковой частоты, совершает также гармоническое колебание в том же направлении и с той же частотой, что и складываемые колебания. Амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз ($\alpha_2 - \alpha_1$) складываемых колебаний.

2. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Пусть оба колебания совершаются с одинаковой частотой:

$$\begin{cases} x = a_1 \cos(\omega t + \alpha_1), \\ y = a_2 \cos(\omega t + \alpha_2). \end{cases}$$

Физика

Надо исключить время и связать x с y . После математических преобразований получим уравнение эллипса:

$$\left(\frac{x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{a_2}\right)^2 - \frac{2xy}{a_1 a_2} \cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1);$$

а) $\alpha_2 - \alpha_1 = 2k\pi, k = 0, 1, 2, \dots$

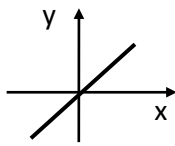


Рис. 8

$$\left(\frac{x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{a_2}\right)^2 - \frac{2xy}{a_1 a_2} = 0,$$

$$\frac{x}{a_1} - \frac{y}{a_2} = 0,$$

$$y = \frac{a_2}{a_1} x - \text{уравнение прямой (рис.8);}$$

б) $\alpha_2 - \alpha_1 = (2k + 1)\pi, k = 0, 1, 2, \dots$

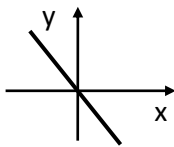


Рис. 9

$$\left(\frac{x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{a_2}\right)^2 + \frac{2xy}{a_1 a_2} = 0,$$

$$y = -\frac{a_2}{a_1} x - \text{уравнение прямой (рис.9);}$$

в) $\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{2}(2k + 1), k = 0, 1, 2, \dots$

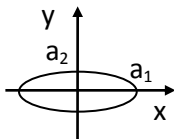


Рис. 10

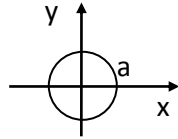


Рис. 11

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 1 - \text{уравнение эллипса (рис.10),}$$

Если $a_1 = a_2, x^2 + y^2 = a^2$ - уравнение окружности (рис.11).

3. Если складываются взаимно **перпендикулярные колебания с кратными периодами**, то результирующее движение происходит по сложным симметричным кривым, называемым фигурами Лиссажу. Их вид зависит от соотношения периодов и разности фаз складываемых колебаний.

Фигуры Лиссажу находят широкое применение в измерительной технике при исследовании соотношений частот и разности фаз складываемых колебаний.

Лекция 9. Вынужденные механические колебания. Упругие волны.

9.1 Вынужденные колебания. Резонанс.

Вынужденными называются колебания, которые совершаются в системе под действием периодически изменяющейся внешней силы.

Пусть внешняя сила изменяется по гармоническому закону:

$$F = F_0 \cos \omega t.$$

Кроме внешней силы, на колеблющуюся систему действует возвращающая сила и сила сопротивления, пропорциональная скорости колебаний:

$$\vec{F} + \vec{F}_{\text{возвр}} + \vec{F}_{\text{сопр}} = m\vec{a},$$

$$F_0 \cos \omega t - kx - \frac{dx}{dt} r = m \frac{d^2 x}{dt^2},$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t.$$

$$\text{Обозначим: } \frac{r}{m} = 2\beta, \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{F_0}{m} = f,$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t \quad (1)$$

дифференциальное уравнение вынужденных гармонических колебаний.

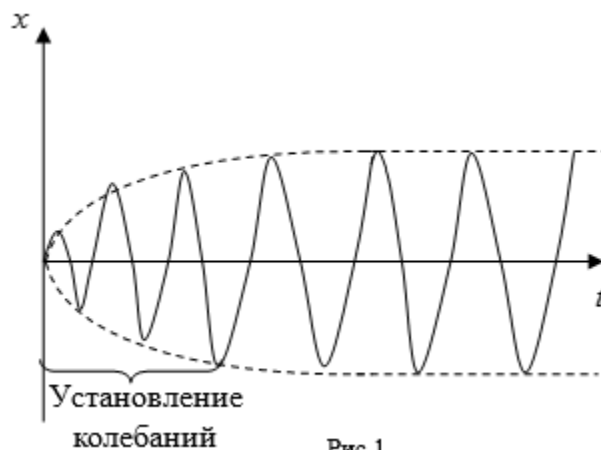


Рис.1

Вынужденные колебания совершаются с частотой, равной частоте вынуждающей силы. Экспериментально установлено, что смещение x отстает в своем изменении от вынуждающей силы. Можно доказать, что решением уравнения (1) является выражение $x = A \cos(\omega t - \psi)$, где A - амплитуда вынужденных колебаний, ψ - разность фаз колебаний x и F .

Графически вынужденные колебания представлены на рис.1.

Если вынуждающая сила изменяется по гармоническому закону, то и сами колебания будут гармоническими. Их частота равна частоте вынуждающей силы, а амплитуда пропорциональна амплитуде вынуждающей силы.

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}; \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Зависимость амплитуды от частоты вынуждающей силы ω приводит к тому, что при некоторой, определенной для данной системы частоте, амплитуда

достигает максимума. Чтобы найти эту частоту, определим максимум функции амплитуды.

$$A'_\omega = 0; \quad -2(\omega_0^2 - \omega^2)2\omega + 8\beta^2\omega = 0; \quad \omega_0^2 - \omega^2 = 2\beta^2,$$

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2},$$

$$A_{рез} = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\beta^2)^2 + 4\beta^2(\omega_0^2 - 2\beta^2)}} = \frac{f}{\sqrt{4\beta^4 + 4\beta^2\omega_0^2 - 8\beta^4}} = \frac{f}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

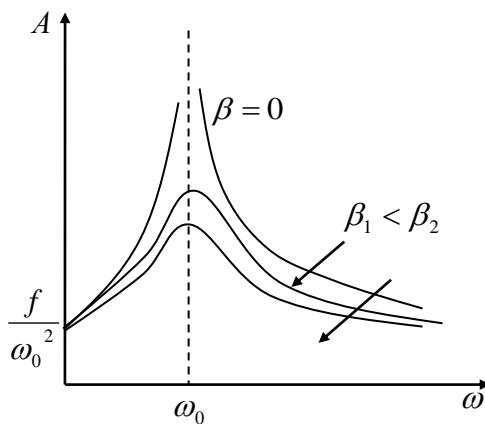


Рис.2

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к собственной частоте системы (к резонансной частоте) называется **резонансом** (рис.2).

Выводы:

1. амплитуда вынужденных колебаний пропорциональна амплитуде вынуждающей силы;

2. амплитуда вынужденных колебаний обратно пропорциональна β ;

3. при $\omega \rightarrow 0$ $A = \frac{f}{\omega_0^2}$;

4. при $\omega \rightarrow \infty$ $A \rightarrow 0$;

5. при $\beta = 0$ $A \rightarrow \infty$.

9.2 Продольные и поперечные упругие волны.

Принцип Гюйгенса.

Любое упругое тело состоит из большого числа частиц (атомов, молекул), взаимодействующих друг с другом. Силы взаимодействия проявляются при изменении расстояния между частицами (при растяжении возникают силы притяжения, при сжатии – отталкивания) и имеют электромагнитную природу. Если какая-либо частица внешним воздействием выводится из положения равновесия, то она потянет за собой в том же направлении другую частицу, эта вторая – третью, и возмущение будет распространяться от частицы к частице в среде с определенной скоростью, зависящей от свойств среды. Если частица была сдвинута вверх, то под действием верхних частиц, отталкивающих, и нижних, притягивающих, она начнет двигаться вниз, пройдет положение равновесия, по инерции сместится вниз и т.д., т.е. будет совершать

Физика

гармоническое колебательное движение, вынуждая к колебаниям соседнюю частицу, и т.д. Поэтому при распространении возмущения в среде все частицы совершают колебания с одинаковой частотой, каждая около своего положения равновесия.

Процесс распространения механических колебаний в упругой среде называется упругой волной. Этот процесс периодичен во времени и пространстве. При распространении волны частицы среды не движутся вместе с волной, а колеблются около своих положений равновесия. Вместе с волной от частицы к частице среды передается лишь состояние колебательного движения и его энергия. Поэтому основное свойство всех волн - перенос энергии без переноса вещества.

Различают продольные и поперечные упругие волны.

Упругая волна называется продольной, если частицы среды колеблются вдоль направления распространения волны (рис.3).

Примером продольной волны может служить волна, возникающая в упругой пружине, надетой на длинный стержень, один конец которой закреплен неподвижно, а другой периодически сжимают или растягивают (рис. 3)

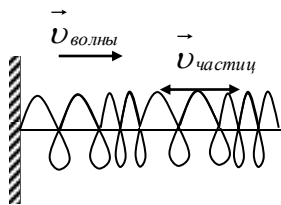


Рис.3

При распространении такой волны в среде возникают сгущения и разрежения. Продольные волны возникают в твердых, жидких и газообразных телах, в которых возникают упругие деформации при сжатии или растяжении.

Упругая волна называется поперечной, если частицы среды колеблются перпендикулярно направлению распространения волны (рис. 4).

Примером поперечных волн могут служить волны, возникающие в резиновом шнуре, один конец которого закреплен неподвижно, а другому сообщено колебательное движение (рис. 4)

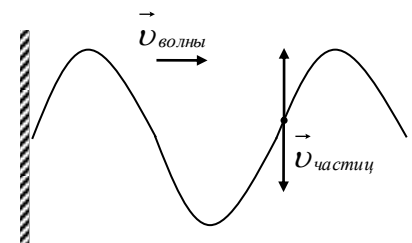


Рис.4

При распространении поперечной волны в упругой среде образуются гребни и впадины. Поперечная волна возможна в среде, где деформация сдвига вызывает упругие силы, т.е. в твердых телах. На границе раздела 2-х жидкостей или жидкости и газа возникают волны на поверхности жидкости, они вызываются либо силами натяжения, либо силами тяжести.

Таким образом, внутри жидкости и газа возникают только продольные волны, в твердых телах – продольные и поперечные.

Скорость распространения волн зависит от упругих свойств среды и ее плотности. Как следует из теоретического рассмотрения, скорость продольных волн:

$$v_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \text{ где } E - \text{модуль Юнга, } \rho - \text{плотность среды,}$$

скорость поперечных волн:

Физика

$$v_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \text{ где } G - \text{модуль сдвига.}$$

$$\text{Т.к. для твердых веществ } \frac{E}{G} \approx 2,5, \quad \frac{v_1}{v_2} \approx 1,5,$$

т.е. скорость распространения продольных волн ~в 1,5 раза больше скорости поперечных.

Распространяясь от одного источника, обе волны приходят к приемнику в разное время. Измеряя разность времен распространения продольных и поперечных волн, можно определить место источника волн (атомного взрыва, эпицентра землетрясения и т.д.).

С другой стороны, скорость распространения волн в земной коре зависит от пород, залегающих между источником и приемником волн. Это является основой геофизических методов исследования состава земной коры и поиска полезных ископаемых.

Продольные волны, распространяющиеся в газах, жидкости и твердых телах и воспринимаемые человеком, называются звуковыми волнами. Их частота лежит в пределах от 16 до 20000 Гц, ниже 16 Гц - инфразвук, выше 20000 Гц - ультразвук.

Соколов С.Я., член корреспондент АН СССР, в 1927-28 гг. обнаружил способность ультразвуковых волн проникать сквозь металлы и разработал методику УЗ дефектоскопии, сконструировав первый УЗ генератор на 109 Гц. В 1945 году он первым разработал метод преобразования механических волн в видимые световые и создал ультразвуковой микроскоп.

Волна, распространяясь от источника колебаний, охватывает все новые и новые области пространства.

Геометрическое место точек, до которых распространились колебания к данному моменту времени t , называется **фронтом волны**.

Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется **волновой поверхностью**.

Волновых поверхностей можно провести бесконечно много, но их вид для данной волны одинаков. Волновой фронт представляет собой волновую поверхность в данный момент времени.

В принципе волновые поверхности могут быть любой формы, а в простейшем случае это совокупность параллельных плоскостей или концентрических сфер (рис. 5).

Волна называется **плоской**, если ее фронт представляет собой плоскость.

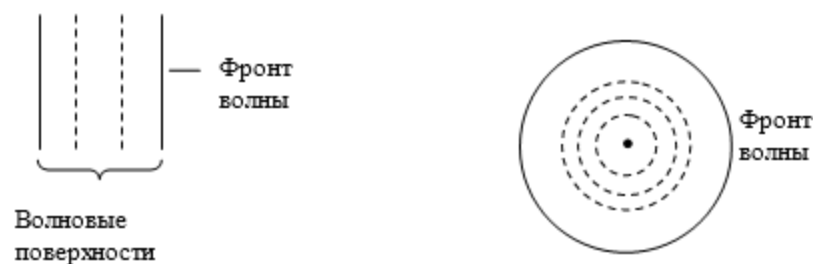


Рис.5

Физика

Волна называется **сферической**, если ее фронт представляет собой поверхность сферы.

Волны, распространяющиеся в однородной изотропной среде от точечных источников, являются сферическими. На большом расстоянии от источника сферическая волна может рассматриваться как плоская.

Принцип Гюйгенса: каждая точка фронта волны (т.е. каждая колеблющаяся частица среды) является источником вторичных сферических волн. Новое положение фронта волны представляется огибающей этих вторичных волн.

Это утверждение высказал в 1690 году голландский ученый Гюйгенс. Справедливость его можно проиллюстрировать с помощью волн на поверхности

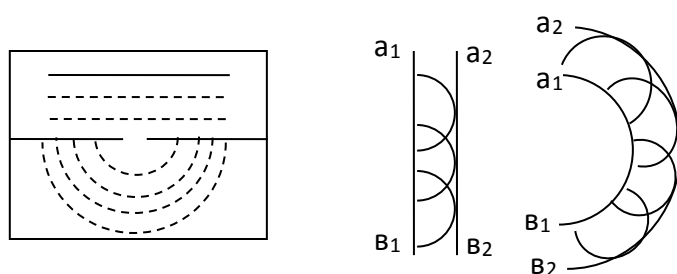


Рис.6

воды, которые имитируют сферические волны, возникающие в объеме упругой среды.

a_1B_1 - фронт в момент t_1 ,

a_2B_2 - фронт в момент t_2 .

Перегородив поверхность воды преградой с малым

отверстием и направив на преграду плоскую волну, убеждаемся, что за преградой - сферическая волна (рис. 6).

9.3 Уравнение плоской бегущей волны.

Бегущими называются волны, которые переносят в пространстве энергию.

Получим уравнение бегущей плоской волны, предполагая, что колебания носят гармонический характер, а ось Y совпадает с направлением распространения волны.

Уравнение волны определяет зависимость смещения колеблющейся частицы среды от координат и времени.

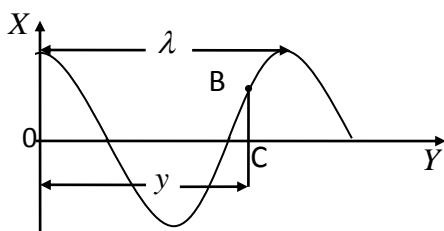


Рис.7

Пусть некоторая частица среды B (рис. 7) находится на расстоянии y от источника колебаний, расположенного в точке O . В точке O смещение частицы от положения равновесия происходит по гармоническому закону $x = A \cos \omega t$,

где t - время, отсчитываемое от начала колебаний.

В точке C $x = A \cos \omega(t - \tau)$, где $\tau = \frac{y}{v}$ - время, за которое волна от точки O доходит до точки C , v - скорость распространения волны.

$$x = A \cos \omega \left(t - \frac{y}{v} \right) \text{ - уравнение плоской бегущей волны.}$$

Это уравнение определяет величину смещения x колеблющейся точки, характеризуемой координатой y , в любой момент времени t .

Физика

Если плоская волна распространяется не в положительном направлении оси Y , а в противоположном направлении, то

$$x = A \cos \omega \left(t + \frac{y}{v} \right).$$

Расстояние между ближайшими точками, колеблющимися в одинаковой фазе, называется длиной волны.

Длина волны - расстояние, на которое распространяется волна за период колебаний частиц среды, т.е.

$$\lambda = vT.$$

$$\text{Т.к.} \quad T = \frac{1}{\nu}, \quad \lambda = \frac{v}{\nu}, \quad v = \lambda \nu, \quad \omega = 2\pi \nu,$$

$$x = A \cos \left(\omega t - \frac{2\pi \nu y}{\lambda \nu} \right), \quad x = A \cos(\omega t - ky),$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ - волновое число.

В общем случае $x = A \cos \underbrace{(\omega t - ky + \alpha_0)}_{\text{фаза плоской волны}}.$

Лекция 10. Уравнение состояния идеального газа и основное уравнение МКТ

10.1 Основные положения и основные понятия МКТ.

Существуют два основных метода описания физических явлений и построения соответствующих теорий:

1. молекулярно-кинетический (статистический);
2. термодинамический.

Молекулярно-кинетический метод рассматривает свойства физических объектов как суммарный результат действия всех молекул.

Поведение отдельной молекулы анализируется на основе законов классической механики, и полученные результаты распространяются на совокупность большого числа молекул с помощью статистического метода, использующего законы теории вероятности. Это возможно, поскольку движение каждой молекулы хотя и проходит по законам классической механики, но является случайным, т.к. скорости молекул подчиняются законам теории вероятности. Чем больше частиц в системе, тем лучше совпадают выводы статистической теории с результатами эксперимента.

Преимущество метода - ясная картина механизма рассматриваемого явления.

Недостаток - выводы МК теории являются результатом усреднения, поэтому являются приближенными.

Термодинамический метод основывается на введении понятия энергии и рассматривает все процессы с энергетической точки зрения, основываясь на законах сохранения и превращения энергии из одного вида в другой.

Молекулярная физика - раздел физики, изучающий строение и свойства вещества исходя из молекулярно-кинетической теории.

Идея об атомном строении вещества высказана древнегреческим философом Демокритом (~400 г до н.э.). Как научная гипотеза теория атомизма возрождается в XVII веке и развивается в работах Ломоносова (18 век), объяснившего тепловые явления как результат движения мельчайших частиц вещества.

Основные положения МКТ базируются на ряде опытных данных и наблюдений (диффузия, броуновское движение).

1. Все вещества состоят из атомов или молекул.
2. Атомы всех веществ находятся в беспрестанном хаотическом движении.
3. Атомы (или молекулы) всех веществ взаимодействуют между собой.

Диффузия - явление проникновения молекул одного вещества между молекулами другого при их соприкосновении.

Броуновское движение – хаотическое движение взвешенных в жидкости или газе частиц.

Молекула - мельчайшая частица вещества, обладающая всеми его химическими свойствами. $m_0 \approx 10^{-26}$ кг, $d \approx 10^{-10}$ м.

Физика

Молекулярная масса - масса одной молекулы, измеряется в а.е.м.

Введем понятие моля вещества.

вещество	масса м-лы (а.е.м.)	масса вещества (г)	число молекул
H ₂	2	2	6,02·10 ²³
C	12	12	6,02·10 ²³
O ₂	32	32	6,02·10 ²³
CO ₂	44	44	6,02·10 ²³

1 моль - это количество вещества, в котором содержится столько молекул, сколько их содержится в 12 г ¹²₆C (основная единица СИ).

Число Авогадро N_A - это число молекул, содержащихся в одном моле любого вещества. Молярная масса - масса одного моля.

$$M_{H_2} = 2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}, \quad N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{моль}},$$

$$\nu = \frac{m}{M} - \text{число молей вещества},$$

$$N = N_A \cdot \nu = N_A \cdot \frac{m}{M} - \text{число молекул вещества}.$$

10.2 Уравнение состояния идеального газа.

Опытные газовые законы.

В МКТ используют идеализированную модель идеального газа.

Идеальный газ - это газ, молекулы которого можно рассматривать как материальные точки, а их взаимодействие носит характер абсолютно упругого удара. (при низком p и высокой T реальные газы приближаются к идеальным).

Состояние некоторой массы газа определяется тремя термодинамическими параметрами: p, V, T.

Давление газа представляет собой результат ударов молекул газа о стенки сосуда, в котором газ находится.

$$[p]=1\text{Па}, \quad [V]=1\text{м}^3.$$

В соответствии с решением XI Генеральной конференции по мерам и весам (1960 г.) применяют две температурные шкалы - термодинамическую (Кельвина) и Международную практическую (Цельсия).

За 0°С принята температура замерзания воды при p=1 атм. За 0 К принята температура, при которой должно прекратиться хаотическое движение молекул. Анализ различных процессов показывает, что 0 К недостижим, хотя приближение к нему сколь угодно близко возможно.

Градус Кельвина равен градусу Цельсия.

$$T = t^\circ\text{C} + 273, \quad \Delta T = \Delta t^\circ.$$

Между параметрами газа существует определенная связь, называемая уравнением состояния. Уравнение, связывающее параметры состояния идеального газа, называется уравнением состояния идеального газа или уравнением Клапейрона:

$$\frac{pV}{T} = const \quad (1)$$

Для данной массы идеального газа отношение произведения давления на объем к абсолютной температуре есть величина постоянная.

Определим значение константы $\frac{pV}{T}$ для определенного количества идеального газа, а именно для одного моля.

Согласно закону Авогадро 1 моль любого газа при нормальных условиях ($T_0=273\text{ K}$, $p_0=10^5\text{ Па}$) имеет $V_M=22,4\cdot10^{-3}\text{ м}^3$.

Для одного моля

$$\frac{p_0 V_M}{T_0} = \frac{1,013 \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 / \text{моль}}{273 \text{ К}} = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}};$$

$$R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} - \text{молярная газовая постоянная.}$$

Для произвольной массы газа

$$\nu = \frac{m}{M}, \quad \frac{pV}{T} = \nu R, \quad \frac{pV}{T} = \frac{m}{M} R,$$

$$pV = \frac{m}{M} RT - \text{уравнение Менделеева-Клапейрона} - \text{уравнение состояния}$$

идеального газа произвольной массы.

Уравнение (1) объединяет в себе три частных случая, три эмпирических закона для изопроцессов, т.е. процессов, при которых один из параметров остается постоянным.

1. $T = \text{const}$ – изотермический процесс,

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad \text{или} \quad pV = \text{const} - \text{закон}$$

Бойля-Мариотта: для данной массы идеального газа при $T = \text{const}$ произведение давления на объем есть величина постоянная.

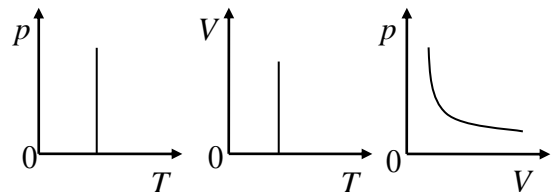


Рис. 1

2. Графики зависимости между параметрами состояния газа при $T = \text{const}$ представлены на рис. 1.

$p = \text{const}$ – изобарный процесс,

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}, \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{или} \quad \frac{V}{T} = \text{const} - \text{закон Гей-}$$

Люссака: для данной массы идеального газа при $p = \text{const}$ объем прямо пропорционален абсолютной температуре.

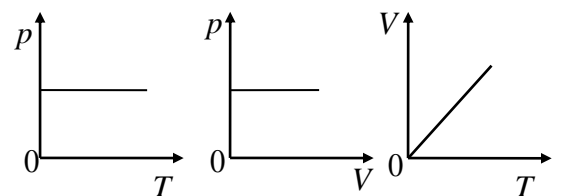


Рис. 2

Графики зависимости между параметрами состояния газа при $p = \text{const}$ представлены на рис. 2.

3. $V = \text{const}$ – изохорный процесс,

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}, \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{или} \quad \frac{p}{T} = \text{const} - \text{закон}$$

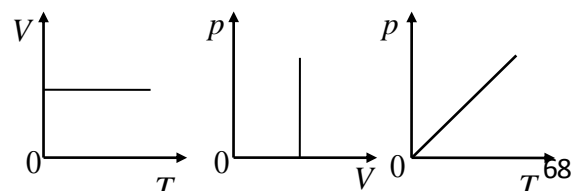


Рис. 3

Шарля: для данной массы идеального газа при $V=\text{const}$ давление прямо пропорционально абсолютной температуре.

Графики зависимости между параметрами состояния газа при $V=\text{const}$ представлены на рис. 3.

10.3 Основное уравнение МКТ идеальных газов.

Основное уравнение МКТ связывает параметры состояния газа с характеристиками движения его молекул. Давление газа на стенки сосуда есть следствие

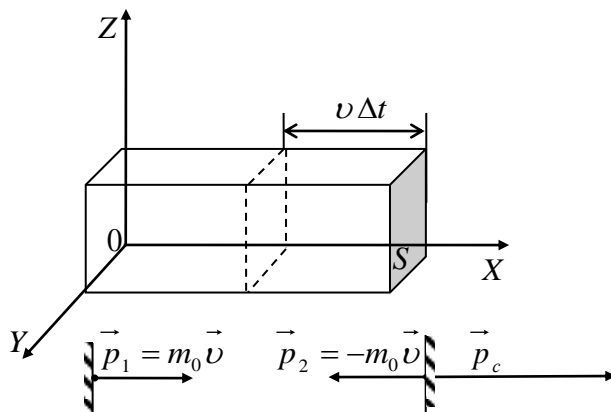


Рис. 4

бесчисленных столкновений молекул газа со стенками. Средняя сила, возникающая от совокупного действия всех молекул газа, определяет давление газа.

Представим себе сосуд в виде прямоугольного параллелепипеда, в котором содержится идеальный газ (рис.4). Вычислим давление газа на одну из стенок сосуда площадью S .

Рассмотрим удар одной молекулы, которая до удара двигалась перпендикулярно стенке. Согласно закону сохранения импульса

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_c,$$

$$m_0 v = -m_0 v + p_c, \quad p_c = 2m_0 v,$$

$\Delta p_c = p_c - p_{0c} = p_c = 2m_0 v$ – изменение импульса стенки вследствие удара одной молекулы.

За время Δt площадки S достигнут только те молекулы, которые заключены в объеме параллелепипеда с основанием S и высотой $v\Delta t$. Необходимо учитывать, что реально молекулы движутся к площадке S под разными углами. Для упрощения расчетов хаотическое движение молекул заменяют движением вдоль трёх взаимно перпендикулярных направлений, так что вдоль каждого из них движется $1/3$ молекул, причем половина молекул ($1/6$) движется вдоль данного направления в одну сторону, половина - в противоположную.

$$N' = \frac{1}{6} n V = \frac{1}{6} n S v \Delta t,$$

$$n = \frac{N}{V} \text{ – концентрация молекул, их число в единице объема.}$$

За время Δt изменение импульса стенки составит

$$\Delta p = N' \Delta p_c = \frac{1}{6} n S v \Delta t 2m_0 v = \frac{1}{3} n m_0 v^2 S \Delta t$$

$$\text{Т.к. } \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \vec{F},$$

$F = \frac{1}{3} n m_0 v^2 S$ - сила, с которой молекулы воздействуют на стенку, а давление, обусловленное этой силой, т.е. давление газа, равно

$$p = \frac{F}{S} = \frac{1}{3} m_0 n v^2. \quad (2)$$

Если в объеме V содержится N молекул, движущихся со скоростями v_1, v_2, \dots, v_N , то целесообразно рассматривать среднюю квадратичную скорость, характеризующую всю совокупность молекул газа:

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{v_1^2 + \dots + v_N^2}{N}}. \quad (3)$$

Уравнение (2) и учетом (3) примет вид:

$$p = \frac{1}{3} m_0 n \langle v_{\text{кв}} \rangle^2 - \text{основное уравнение МКТ.}$$

$$p = \frac{2}{3} n \cdot \frac{m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2}{2} = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_0 \rangle,$$

где $\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2}{2}$ - средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы.

$$\text{Поскольку } m_0 n = \frac{m_0 N}{V} = \frac{m}{V} = \rho, \quad p = \frac{1}{3} \rho \langle v_{\text{кв}} \rangle^2.$$

Выразим $\langle \varepsilon_0 \rangle$ через параметры газа. Для этого сопоставим уравнение Менделеева-Клапейрона и уравнение МКТ.

$$pV = \frac{m}{M} RT,$$

$$p = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_0 \rangle,$$

$$\frac{2}{3} n \langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{\nu}{V} RT,$$

$$\text{т.к. } \nu = \frac{N}{N_A}, \quad n = \frac{N}{V},$$

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{3}{2} \frac{\nu}{nV} RT = \frac{3}{2} \frac{NRT}{N_A \frac{N}{V}} = \frac{3}{2} kT,$$

$$\text{где } k = \frac{R}{N_A} = \frac{8,31}{6,02 \cdot 10^{23}} \frac{\text{Дж}}{\text{К}} = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}} - \text{постоянная Больцмана;}$$

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{3}{2} kT.$$

Таким образом, абсолютная температура есть мера средней кинетической энергии молекул.

Получим ещё одно выражение для давления:

$$p = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{2}{3} n \cdot \frac{3}{2} kT = nkT.$$

Лекция 11. Распределения Максвелла и Больцмана. Явления переноса

11.1 Закон Максвелла о распределении молекул по скоростям. Характерные скорости молекул.

Молекулы газа движутся хаотически и в результате столкновений скорости их меняются по величине и направлению; в газе имеются молекулы как с очень большими, так и с очень малыми скоростями. Можно поставить вопрос о числе молекул, скорости которых лежат в интервале от v и $v + \Delta v$ для газа в состоянии термодинамического равновесия в отсутствии внешних силовых полей. В этом случае устанавливается некоторое стационарное, не меняющееся со временем распределение молекул по скоростям, которое подчиняется статистическому закону, теоретически выведенному Максвеллом.

Чем больше общее число молекул N , тем большее число молекул ΔN будет обладать скоростями в интервале от v и $v + \Delta v$; чем больше интервал скоростей Δv , тем у большего числа молекул ΔN значение скоростей будет лежать в указанном интервале: $\Delta N \sim N \Delta v$.

Введем коэффициент пропорциональности $f(v)$:

$$\Delta N = f(v) N \Delta v, \quad (1)$$

где $f(v)$ называется функцией распределения, которая зависит от скорости молекул и характеризует распределение молекул по скоростям.

Если вид функции $f(v)$ известен, можно найти число молекул ΔN , скорости которых лежат в интервале от v и $v + \Delta v$.

С помощью методов теории вероятности и законов статистики Максвелл в 1860г. теоретически получил формулу, определяющую число молекул ΔN , обладающих скоростями в интервале от v до $v + \Delta v$.

$$\Delta N = 4\pi v^2 \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} N \Delta v, \quad (2)$$

$$\frac{\Delta N}{N} = 4\pi v^2 \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \Delta v - \text{распределение Максвелла показывает, какая}$$

доля $\frac{\Delta N}{N}$ общего числа молекул данного газа обладает скоростями в интервале от v до $v + \Delta v$.

Из уравнений (1) и (2) следует вид функции $f(v)$:

$$f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}. \quad (3)$$

функция распределения молекул идеального газа по скоростям.

Из (3) видно, что конкретный вид функции $f(v)$ зависит от рода газа (от массы молекулы m_0) и температуры.

Наиболее часто закон распределения молекул по скоростям записывают в виде:

$$dN = N \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \cdot 4\pi v^2 dv.$$

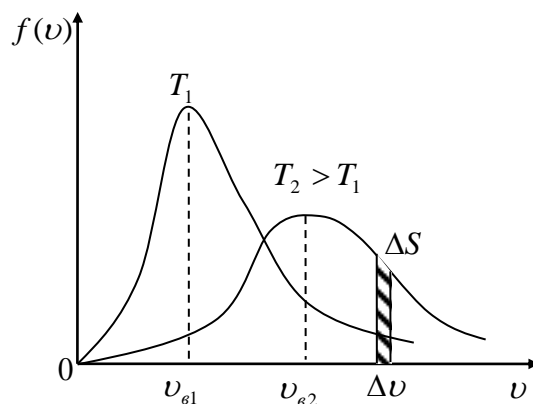


Рис. 1

График функции $f(v)$ асимметричен (рис. 1). Положение максимума характеризует наиболее часто встречающуюся скорость, которая называется наиболее вероятной. Скорости, превышающие $v_{\text{в}}$, встречаются чаще, чем меньшие скорости.

$$\Delta S = f(v) \cdot \Delta v = \frac{\Delta N}{N} \quad - \text{доля общего}$$

числа молекул, обладающих скоростями в этом интервале; $S_{\text{общ.}} = 1$.

Таким образом, функция $f(v)$ удовлетворяет условию нормировки

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1.$$

С повышением температуры максимум распределения сдвигается в сторону больших скоростей, а кривая становится более полой, однако площадь под кривой не изменяется, т.к. $S_{\text{общ.}} = 1$.

Наиболее вероятной называют скорость, близкой к которой оказываются скорости большинства молекул данного газа.

Для её определения исследуем $f(v)$ на максимум.

$$f'(v) = 0, \quad 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left(2v e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} - v^2 \frac{2m_0 v}{2kT} e^{-\frac{2m_0 v}{2kT}} \right) = 0,$$

$$2 - \frac{m_0 v^2}{kT} = 0, \quad v = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}.$$

$$v_{\text{с}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}, \quad v_{\text{с}} = \sqrt{\frac{2kN_A T}{m_0 N_A}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}.$$

Ранее было показано, что

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{m_0 \langle v_{\text{сг}} \rangle^2}{2}, \quad \langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{3}{2} kT,$$

$$\frac{m_0 \langle v_{\text{сг}} \rangle^2}{2} = \frac{3}{2} kT \Rightarrow \langle v_{\text{сг}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

В МКТ используют также понятие средней арифметической скорости поступательного движения молекул идеального газа.

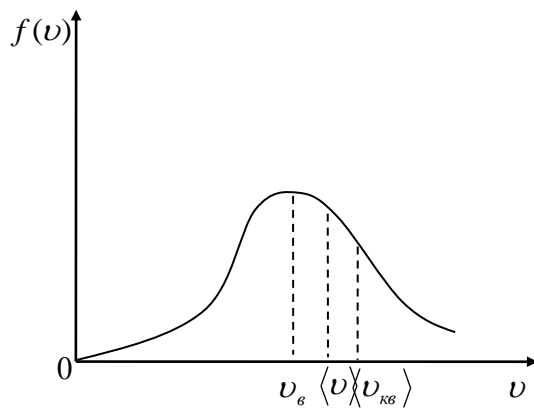


Рис. 2

$$\langle v \rangle = \frac{|\vec{v}_1| + \dots + |\vec{v}_N|}{N} \quad - \text{ равна отношению}$$

суммы модулей скоростей всех молекул к числу молекул.

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi n_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$

Из сравнения видно (рис.2), что наименьшей является $v_с$.

11.2 Распределение Больцмана.

Два фактора - тепловое движение молекул и наличие поле тяготения Земли приводят газ в состояние, при котором его концентрация и давление убывают с высотой.

Если бы не было теплового движения молекул атмосферного воздуха, то все они сосредоточились бы у поверхности Земли. Если бы не было тяготения, то частицы атмосферы рассеялись бы по всей Вселенной. Найдем закон изменения давления с высотой.

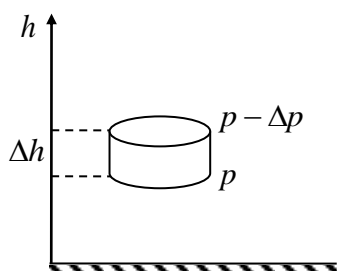


Рис. 3

Давление столба газа определяется формулой $p = \rho g h$.

Поскольку с увеличением высоты давление уменьшается,

$$\Delta p = -\rho g \Delta h,$$

$$dp = -\rho g dh,$$

где ρ - плотность газа на высоте h .

Выразим плотность ρ из уравнения Менделеева-Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M} RT, \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}$$

$$dp = -\frac{pMg}{RT} dh, \quad \text{или} \quad \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dh.$$

Проведем расчет для изотермической атмосферы, считая, что $T = \text{const}$ (не зависит от высоты); при $h = 0$ $p = p_0$ - нормальное атмосферное давление.

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} \int_0^h dh,$$

$$\ln p - \ln p_0 = -\frac{Mgh}{RT},$$

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{Mgh}{RT},$$

$$\frac{p}{p_0} = e^{-\frac{Mgh}{RT}},$$

$p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}$ - барометрическая формула, определяет давление газа на любой высоте.

Получим выражение для концентрации молекул на любой высоте.

$$p = nkT, \quad p_0 = n_0 kT,$$

$$nkT = n_0 kT e^{-\frac{Mgh}{RT}}, \quad n = n_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}.$$

$$\text{Т. к. } M = m_0 N_A, \quad R = k N_A, \quad \frac{Mgh}{RT} = \frac{m_0 N_A gh}{k N_A T} = \frac{m_0 gh}{kT} = \frac{W_n}{kT},$$

где $W_n = m_0 gh$ - потенциальная энергия молекулы на высоте h .

$$n = n_0 e^{-\frac{W_n}{kT}} - \text{распределение Больцмана во внешнем потенциальном поле.}$$

Следовательно, распределение молекул по высоте есть их распределение по энергиям. Больцман доказал, что это распределение справедливо не только в случае потенциального поля сил земного тяготения, но и в любом потенциальном поле сил для совокупности любых одинаковых частиц, находящихся в состоянии хаотического теплового движения.

Из распределения Больцмана следует, что молекулы располагаются с большей концентрацией там, где их потенциальная энергия меньше.

Распределение Больцмана - распределение частиц в потенциальном силовом поле.

11.3 Средняя длина свободного пробега молекул.

Вследствие хаотического теплового движения молекулы газа непрерывно сталкиваются друг с другом, проходят сложный зигзагообразный путь. Между 2-мя столкновениями молекулы движутся равномерно прямолинейно.

Минимальное расстояние, на которое сближаются центры 2-х молекул при соударении, называется эффективным диаметром молекулы d (рис. 4).

Величина $\sigma = \pi d^2$ называется эффективным сечением молекулы.

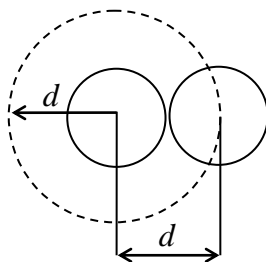


Рис. 4

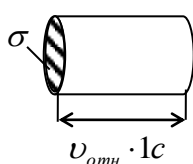


Рис. 5

Найдем среднее число столкновений молекулы однородного газа в единицу времени $\langle z \rangle_0$. Столкновение произойдет, если центры молекул сблизятся на расстояние, меньшее или равное d . Предполагаем, что молекула движется со скоростью $\langle v \rangle$, а остальные молекулы покоятся. Тогда число столкновений определяется числом молекул, центры которых находятся в объеме, представляющем собой цилиндр с основанием $\sigma = \pi d^2$ и высотой, равной пути, пройденному молекулой за 1с, т.е. $\langle v \rangle$.

В действительности все молекулы движутся, и возможность столкновения 2-х молекул определяет их относительная скорость. Можно показать, что если для скоростей молекул принято распределение Максвелла,

$$\langle v_{\text{отн}} \rangle = \langle v \rangle \sqrt{2}.$$

$$\langle z \rangle = nV = n\pi d^2 \langle v_{\text{отн}} \rangle = \sqrt{2} \pi d^2 \langle v \rangle, \quad [z] = \frac{m^2}{m^3} \cdot \frac{m}{c} = \frac{1}{c} = c^{-1}.$$

Для большинства газов при нормальных условиях

$$\langle z \rangle = 10^9 - 10^{10} \text{ c}^{-1}.$$

Средняя длина свободного пробега - это среднее расстояние, которое проходит молекула между двумя последовательными соударениями. Оно равно отношению пройденного за время Δt пути к числу соударений за это время:

$$\langle l \rangle = \frac{\langle v \rangle \Delta t}{\langle z \rangle \Delta t} = \frac{\langle v \rangle}{\langle z \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}, \quad [l] = \frac{m^3}{m^2} = m.$$

Для большинства газов при нормальных условиях $\langle l \rangle \sim 10^{-7} \text{ м}$.

$\langle l \rangle$ обратно пропорциональна концентрации молекул.

Поскольку $n = \frac{p}{kT}$, $\langle l \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p}.$

При $T = \text{const}$ $\frac{\langle l_1 \rangle}{\langle l_2 \rangle} = \frac{p_2}{p_1}$, $\langle l \rangle$ обратно пропорциональна давлению.

11.4 Явления переноса.

В термодинамических неравновесных системах возникают особые необратимые процессы, называемые явлениями переноса, в результате которых происходит пространственный перенос массы, импульса, энергии. К явлениям переноса относятся диффузия, внутреннее трение, теплопроводность. В основе всех 3-х процессов лежит один механизм - хаотическое движение и перемешивание молекул, поэтому их закономерности должны быть похожи, а количественные характеристики тесно связаны друг с другом.

Нарушение равновесия приводит к возникновению пространственной неоднородности какой-либо физической величины (плотности, температуры, скорости упорядоченного движения слоёв).

Движение молекул выравнивает эти неоднородности. Каждая молекула обладает массой m_0 , импульсом $m_0 v$, энергией $\frac{m_0 v^2}{2}$.

Явление переноса в газах и жидкостях состоит в том, что в этих веществах возникает упорядоченный, направленный перенос массы (диффузия), импульса (внутреннее трение), внутренней энергии (теплопроводность). При этом в газах нарушается полная хаотичность движения молекул и максвелловское распределение молекул по скоростям.

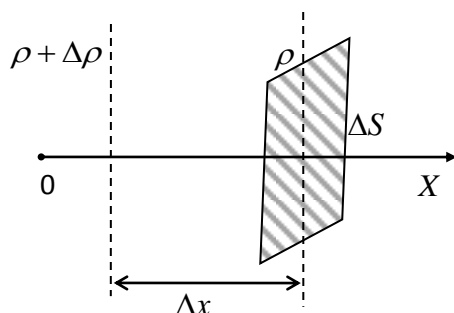


Рис. 6

Диффузией называется самопроизвольное взаимное проникновение и перемещение молекул двух соприкасающихся газов, жидкостей или твердых тел.

Рассмотрим это явление вначале с макроскопической точки зрения, а затем с позиции МКТ.

Физика

ΔS перпендикулярно оси ОХ (рис.6). Пусть в двух точках, отстоящих друг от друга на Δx , плотность отличается на $\Delta \rho$.

Согласно закону Фика, установленному экспериментально, масса газа ΔM , переносимая за время Δt через площадку ΔS , прямо пропорциональна величине этой площадки, времени Δt и градиенту плотности $\frac{\Delta \rho}{\Delta x}$:

$$\Delta M = -D \frac{\Delta \rho}{\Delta x} \Delta S \Delta t, \quad (4)$$

где ρ - плотность газа, $\frac{\Delta \rho}{\Delta x}$ - градиент плотности, т.е. изменение плотности на единице длины в направлении наиболее быстрого её возрастания, D - коэффициент диффузии.

Градиент (от лат «gradiens» - шагающий) - мера измерения какой-либо физической величины при перемещении на единицу длины в направлении наиболее быстрого её возрастания. Если отношение $\frac{\Delta \rho}{\Delta x}$ непостоянно, его следует заменить производной $\frac{d\rho}{dx}$. Знак «минус» показывает, что перенос массы осуществляется в направлении убывания плотности.

$$D = - \frac{\Delta M}{\frac{\Delta \rho}{\Delta x} \cdot \Delta S \Delta t}; \quad [D] = \frac{\frac{кг}{м^3}}{\frac{кг}{м^3} \cdot м} \cdot \frac{м^2}{с} = \frac{м^2}{с}.$$

Согласно кинетической теории газов $D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda$.

Коэффициент диффузии D численно равен массе вещества, переносимого в единицу времени через единицу поверхности при градиенте плотности, равном единице. Величина D зависит от вида газа и условий, при которых он находится.

Рассмотрим явление диффузии с точки зрения МКТ.

Для простоты рассмотрим два одинаковых взаимно проникающих газа, т.е. массы молекул одинаковы. При одинаковых условиях у таких молекул одинаковы $\langle v \rangle$ и λ . Плоскость, которой принадлежит площадка ΔS , делит систему газов на две области: I и II (рис.7).

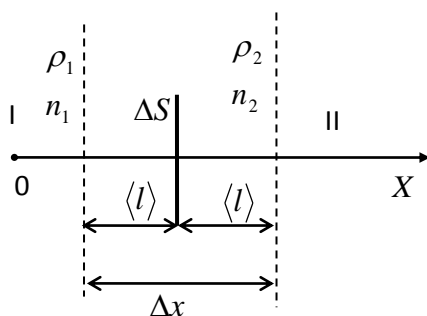


Рис. 7

Ввиду хаотичности движения молекул считаем, что 1/3 их движется вдоль ОХ, а к площадке ΔS - 1/6 от общего числа молекул. За время Δt через ΔS из I в II перейдут N_1 молекул:

$$N_1 = \frac{1}{6} n_1 \Delta S \langle v \rangle \Delta t,$$

а в обратном направлении

$$N_2 = \frac{1}{6} n_2 \Delta S \langle v \rangle \Delta t.$$

Уточним, к каким точкам областей I и II

следует отнести концентрации молекул n_1 и n_2 . Через ΔS проходят молекулы только из того места, где они испытали последнее столкновение, т.е. с расстояния, равного $\langle l \rangle$.

Определим разность между числом молекул N_1 и N_2 , проходящих через ΔS за Δt в обоих направлениях:

$$\Delta N = N_1 - N_2 = \frac{1}{6}(n_1 - n_2)\Delta S \langle v \rangle \Delta t \quad |\times m_0 \frac{\langle l \rangle}{\langle l \rangle}|$$

$$\Delta N m_0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{m_0(n_1 - n_2)}{2 \langle l \rangle} \cdot \langle l \rangle \langle v \rangle \Delta S \Delta t = -\frac{\rho_2 - \rho_1}{3 \cdot 2 \langle l \rangle} \cdot \langle l \rangle \langle v \rangle \Delta S \Delta t = -\frac{1}{3} \frac{\Delta \rho}{\Delta x} \langle l \rangle \langle v \rangle \Delta S \Delta t$$

где $\Delta x = 2\langle l \rangle$, $\Delta N m_0 = \Delta M$ - масса газа, перешедшая через ΔS за Δt .

$$\Delta M = -\frac{1}{3} \cdot \langle v \rangle \langle l \rangle \frac{\Delta \rho}{\Delta x} \Delta S \Delta t. \quad (5)$$

(4) и (5) совпадают, если положить $D = \frac{1}{3} \cdot \langle v \rangle \langle l \rangle$.

При нормальных условиях $\langle l \rangle \sim 10^{-7} \text{ м}$, $\langle v \rangle \sim 10^2 \div 10^3 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $D \approx 10^{-5} \div 10^{-4} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$.

Т.к. $\langle l \rangle \sim \frac{1}{p}$, то $D \sim \frac{1}{p}$ (т.к. $\langle v \rangle$ не зависит от p) - в разреженных газах диффузия идет быстрее.

Т.к. $\langle v \rangle \sim \sqrt{T}$, то $D \sim \sqrt{T}$.

Внутреннее трение в газах (вязкость).

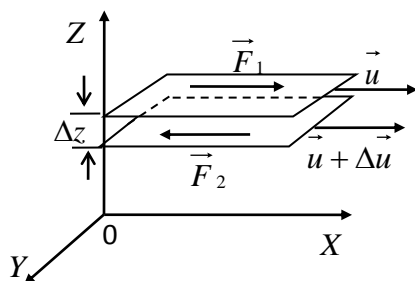


Рис. 8

Вязкостью газов (жидкостей) называется их свойство оказывать сопротивление перемещению одних слоев относительно других. Явление вязкости связано с возникновением сил трения между слоями газа, перемещающимися параллельно друг другу с различными скоростями. Со стороны более быстрого слоя на медленный действует ускоряющая сила \vec{F}_1 , а со стороны медленного – задерживающая \vec{F}_2 (рис. 8). Силы

трения направлены по касательной к поверхности слоев и определяются эмпирической формулой:

$$F = \eta \left| \frac{\Delta u}{\Delta z} \right| \Delta S, \quad (6)$$

где η - динамическая вязкость, $\left| \frac{\Delta u}{\Delta z} \right|$ - градиент скорости, ΔS - площадь слоя.

Формула (6) определяет модуль двух противоположно направленных сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , с которыми слои действуют друг на друга, поэтому отношение $\frac{\Delta u}{\Delta z}$ тоже берем по модулю.

$$\eta = \frac{F}{\frac{\Delta u}{\Delta z} \Delta S}, [\eta] = \text{Па} \cdot \text{с} = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}.$$

Коэффициент η численно равен силе внутреннего трения, действующей на единицу площади поверхности раздела параллельно движущихся слоев при градиенте скорости равном 1.

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \text{ - кинематическая вязкость.}$$

У газов с ростом температуры динамическая вязкость η растёт.

МКТ объясняет вязкость переносом импульса молекул от одного слоя другому.

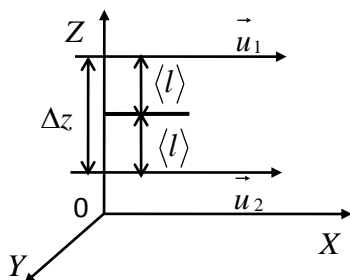


Рис. 9

Выделим в газе два слоя, движущиеся с \vec{u}_1 и \vec{u}_2 (рис. 9). Каждая молекула одновременно участвует в двух движениях:

- 1) хаотическом с $\langle v \rangle \sim 10^3 \text{ м/с}$;
- 2) упорядоченном с $u \ll \langle v \rangle$.

Скорость $\langle v \rangle$ одинакова для всех молекул данного слоя и различна для разных слоёв.

Вследствие теплового движения молекулы переходят из слоя в слой. За время Δt через площадку ΔS в обоих направлениях перейдёт одинаковое количество молекул:

$$N = \frac{1}{6} n \langle v \rangle \Delta S \Delta t.$$

Попав в другой слой при соударении, молекула отдаёт или приобретает избыток импульса, в результате импульс быстро движущегося слоя убывает, а медленного - возрастает.

Молекулы, перешедшие из 1-го слоя во 2-й за Δt перенесут через ΔS импульс \vec{p}_1 , из 2-го в 1-й - \vec{p}_2 :

$$\vec{p}_1 = m_0 N \cdot \vec{u}_1 = \frac{1}{6} m_0 n \langle v \rangle \Delta S \Delta t \vec{u}_1, \quad \vec{p}_2 = \frac{1}{6} m_0 n \langle v \rangle \Delta S \Delta t \vec{u}_2.$$

В результате через площадку ΔS за Δt перенесен импульс

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \frac{1}{6} n m_0 \langle v \rangle \Delta S \Delta t (u_2 - u_1),$$

где $n m_0 = \rho$.

Каждая молекула, пересекая ΔS , переносит импульс, полученный в момент её последнего соударения с другой молекулой, происшедшего на расстоянии $\langle l \rangle$ от ΔS , т.е. наименьшее расстояние, на котором возможно возникновение градиента скорости между слоями, $2\langle l \rangle$.

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{u_2 - u_1}{2\langle l \rangle},$$

Физика

$$\Delta p = \frac{1}{6} \rho \langle v \rangle \Delta S \Delta t \frac{u_2 - u_1}{2 \langle l \rangle} 2 \langle l \rangle = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle \cdot \frac{\Delta u}{\Delta z} \Delta S \Delta t.$$

Поскольку

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}, F = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle \left| \frac{\Delta u}{\Delta z} \right| \Delta S. \quad (7)$$

Из сравнения (6) и (7) следует, что

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle.$$

Большое значение имеет знание вязкости газов и жидкостей в технике при эксплуатации гидравлических амортизаторов, насосов, трубопроводов.

Теплопроводность газов.

Явление теплопроводности возникает, если различные слои газа имеют разную температуру, т.е. обладают разной внутренней энергией. С макроскопической точки зрения явление теплопроводности состоит в переносе количества теплоты от более нагретого тела к менее нагретому.

Согласно эмпирическому закону Фурье

$$\Delta Q = -\chi \frac{\Delta T}{\Delta x} \Delta S \Delta t.$$

Количество теплоты ΔQ , переносимое за время Δt через площадь ΔS , пропорционально градиенту температуры $\frac{\Delta T}{\Delta x}$, площади ΔS и времени Δt .

χ - коэффициент теплопроводности

Знак "минус" указывает на то, что тепло переносится в сторону убывания температуры.

$$\chi = \frac{\Delta Q}{\frac{\Delta T}{\Delta z} \Delta S \Delta t}, [\chi] = \frac{\frac{Дж}{К}}{\frac{К}{м} \cdot м^2 \cdot с} = \frac{Дж}{К \cdot м \cdot с}.$$

Коэффициент теплопроводности χ - физическая величина, численно равная количеству теплоты, переносимой за единицу времени через единицу площади при градиенте температуры, равном единице.

С точки зрения МКТ перенос количества теплоты ΔQ означает перенос через площадку ΔS некоторого количества кинетической энергии беспорядочного движения молекул.

По аналогии с предыдущими случаями:

$$\chi = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle c_v, \text{ где } c_v - \text{удельная теплоемкость газа при постоянном объеме.}$$

Физика

<i>Явление</i>	<i>Перенесенная физическая величина</i>	<i>Макроскопическая теория</i>	<i>Молекулярно-кинетическая теория</i>	
		<i>Закон переноса</i>	<i>Закон переноса</i>	<i>Коэффициент переноса</i>
Диффузия	Масса	$\Delta M = -D \frac{\Delta \rho}{\Delta x} \Delta S \Delta t$	$\Delta M = -\frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle \frac{\Delta \rho}{\Delta x} \Delta S \Delta t$	$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle$
Внутр. трение	Импульс	$\Delta p = -\eta \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta S \Delta t$	$\Delta p = -\frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta S \Delta t$	$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle$
Теплопроводность	Внутренняя энергия	$\Delta Q = -\chi \frac{\Delta T}{\Delta x} \cdot \Delta S \cdot \Delta t$	$\Delta Q = -\frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle c_v - \chi \frac{\Delta T}{\Delta x} \cdot \Delta S \cdot \Delta t$	$\chi = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle c_v$

Знак «минус» в выражении для Δp указывает на то, что импульс передается в направлении убывания скорости.

Лекция 12. Основы термодинамики.

12.1 Основные понятия термодинамики.

В отличие от МКТ термодинамика изучает макроскопические свойства тел и явлений природы, не интересуясь их микроскопической картиной. Не вводя в рассмотрение атомы и молекулы, не входя в микроскопическое рассмотрение процессов, термодинамика позволяет делать целый ряд выводов относительно их протекания.

В основе термодинамики лежит несколько фундаментальных законов (называемых началами термодинамики), установленных на основании обобщения большой совокупности опытных фактов.

Подходя к рассмотрению изменений состояния вещества с различных точек зрения, термодинамика и МКТ взаимно дополняют друг друга, образуя по существу одно целое.

Термодинамика - раздел физики, изучающий общие свойства макроскопических систем, находящихся в состоянии термодинамического равновесия, и процессы перехода между этими состояниями.

Термодинамический метод основан на введении понятия энергии и рассматривает процессы с энергетической точки зрения, т. е. основываясь на законе сохранения энергии и превращении её из одного вида в другой.

Термодинамическая система - совокупность тел, которые могут обмениваться энергией друг с другом и с внешней средой.

Для описания термодинамической системы вводятся физические величины, которые называются термодинамическими параметрами или параметрами состояния системы: p, V, T .

Физические величины, характеризующие состояние термодинамической системы, называются термодинамическими параметрами.

Давлением называется физическая величина, численно равная силе, действующей на единицу площади поверхности тела по направлению нормали к этой поверхности:

$$p = \frac{F_N}{S}, [p] = \frac{H}{m^2} = Pa.$$

Нормальное атмосферное давление $1 \text{ атм} = 10^5 \text{ Па}$.

Абсолютная температура - мера средней кинетической энергии молекул.

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{3}{2} kT, \quad T = t^\circ C + 273.$$

Состояния, в которых находится термодинамическая система, могут быть различными.

Если один из параметров в различных точках системы неодинаков и изменяется с течением времени, то такое состояние системы называется **неравновесным**.

Если все термодинамические параметры остаются постоянными во всех точках системы сколь угодно долго, то такое состояние называется **равновесным** или состоянием термодинамического равновесия.

Любая замкнутая система по истечении определенного времени самопроизвольно переходит в равновесное состояние.

Всякое изменение состояния системы, связанное с изменением хотя бы одного из её параметров, называется **термодинамическим процессом**. Процесс, в котором каждое последующее состояние бесконечно мало отличается от предыдущего, т.е. представляет собой последовательность равновесных состояний, называется равновесным.

Очевидно, что все равновесные процессы протекают бесконечно медленно.

Равновесный процесс может быть проведен в обратном направлении, причем система будет проходить через те же состояния, что и при прямом ходе, но в обратной последовательности. Поэтому равновесные процессы называют **обратимыми**.

Процесс, при котором система после ряда изменений возвращается в исходное состояние, называется **круговым процессом или циклом**.

Все количественные выводы термодинамики строго применимы только к равновесным состояниям и обратимым процессам.

12.2 Число степеней свободы молекулы. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы.

Число степеней свободы – число независимых координат, полностью определяющих положение системы в пространстве. Молекулу одноатомного газа можно рассматривать как материальную точку, обладающую тремя степенями свободы поступательного движения.

Молекула двухатомного газа – совокупность двух материальных точек (атомов), жестко связанных недеформируемой связью; кроме трех степеней свободы поступательного движения имеет еще две степени свободы вращательного движения (рис. 1).

Трех- и многоатомные молекулы имеют $3+3=6$ степеней свободы (рис. 1).

Естественно, что жесткой связи между атомами не существует. Поэтому для реальных молекул (кроме одноатомных) следует учитывать и степени свободы колебательного движения.

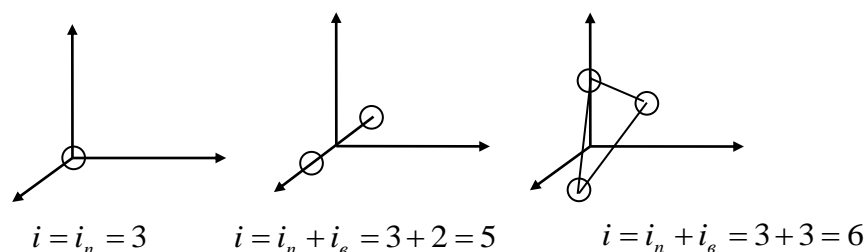


Рис. 1

Как было показано ранее, средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы равна

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{3}{2} kT.$$

Поскольку каждая молекула всегда обладает тремя степенями свободы поступательного движения и ни одна из этих степеней не имеет преимущества перед другими, на каждую степень свободы поступательного движения приходится энергия, равная

$$\langle \varepsilon_1 \rangle = \frac{\langle \varepsilon_0 \rangle}{3} = \frac{1}{2} kT.$$

Т.к. движение молекул является хаотическим, то любое движение – поступательное и вращательное – является равновероятным. Из этого предположения следует один из важнейших законов статистической физики – **закон Больцмана** о равномерном распределении энергии по степеням свободы молекул: на каждую степень свободы поступательного и вращательного движения молекулы приходится в среднем одинаковая кинетическая энергия, равная $\frac{1}{2} kT$.

Для реальных молекул на каждую колебательную степень свободы приходится как кинетическая, так и потенциальная энергия.

$$\langle \varepsilon_k \rangle = \langle \varepsilon_n \rangle = \frac{1}{2} kT, \text{ поэтому } \langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_k \rangle + \langle \varepsilon_n \rangle = \frac{1}{2} kT + \frac{1}{2} kT = kT.$$

Таким образом, средняя кинетическая энергия молекулы

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{i}{2} kT, \text{ где } i - \text{число степеней свободы молекулы.}$$

12.3 Внутренняя энергия и работа газа при расширении.

I закон термодинамики.

Внутренняя энергия термодинамической системы - энергия движения и энергия взаимодействия микрочастиц системы (молекул, атомов, электронов, ядер и т.д.).

Т.к. потенциальная энергия молекул идеального газа равна нулю, внутренняя энергия идеального газа равна суммарной кинетической энергии всех его молекул:

$$U = \langle \varepsilon_0 \rangle N = \frac{i}{2} kT N_A \frac{m}{M} = \frac{i}{2} \frac{m}{M} RT.$$

Изменение внутренней энергии:

$$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R \Delta T.$$

Внутреннюю энергию можно изменить 2-мя способами:

- 1) совершив работу;
- 2) при теплопередаче.

Теплопередачей называют совокупность процессов между молекулами вещества, приводящих к передаче энергии.

Физика

Изменение внутренней энергии системы при теплопередаче характеризуется количеством теплоты. **Количество теплоты** - мера изменения внутренней энергии при теплопередаче.

$$[Q]=Дж.$$

Работа и теплота связаны друг с другом. опыты Джоуля и Роберта Майера показали, что работа и теплота переходят друг в друга в эквивалентных количествах. Однако теплота и работа неравноценны: работа может полностью перейти в теплоту, а теплота полностью перейти в работу не может. Причины этого объясняются началами термодинамики.

I закон термодинамики:

$$Q = \Delta U + A.$$

Количество теплоты Q , переданное системе, идет на увеличение её внутренней энергии ΔU и совершение системой работы A против внешних сил (рис. 2).

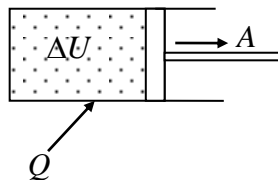


Рис. 2

Первое начало термодинамики подтверждается как теми опытами, на основании которых установлена эквивалентность между Q и A , так и совпадением выводов из него с наблюдаемыми фактами. Оно является выражением закона сохранения и превращения энергии.

Установление первого начала термодинамики позволило объяснить все неудачи, связанные с попыткой создания машины, которая могла бы совершать работу, не получая энергии извне (перпетуум мобиле, или вечный двигатель первого рода). После формулировки первого закона термодинамики стало ясно, что если система не получает извне тепла или другой энергии, то $Q=0$ и $\Delta U=0$, поэтому и $A=0$. Таким образом, создать вечный двигатель первого рода невозможно. Это утверждение является одной из формулировок первого начала термодинамики.

Работа, совершаемая системой при изменении объема, определяется следующим образом.

Пусть газ заключен в некотором цилиндре (рис. 3); найдем его работу при расширении.

Элементарная работа на пути dl

$$\delta A = F dl,$$

где F - сила, с которой газ давит на поршень.

$$p = \frac{F}{S}, \quad F = pS, \quad \delta A = pSdl = pdV.$$

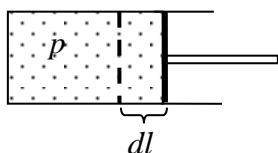


Рис. 3

Работа, совершаемая системой при конечном изменении объема от V_1 до V_2 , находится

$$\text{интегрированием: } A = \int_{V_1}^{V_2} p dV.$$

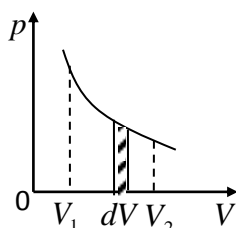


Рис. 4

Произведенную при том или ином процессе работу можно изобразить графически с помощью кривой в координатах p, V .

При увеличении объема на dV совершаемая газом

Физика

работа $\delta A = p dV$ определяется заштрихованной площадью.

Поэтому полная работа, совершаемая при расширении от V_1 до V_2 , определяется площадью, ограниченной осью абсцисс, кривой $p = f(V)$ и прямыми $V = V_1$ и $V = V_2$.

При $p = \text{const}$

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1) = p\Delta V.$$

12.4 Теплоемкость

Первые экспериментальные измерения теплоты были выполнены в 1750 - 1751 г. в Петербурге Г.В. Рихманом. Им было установлено, что количество теплоты Q , переданное телу или отнятое у него, прямо пропорционально его массе и изменению температуры:

$$Q = cm\Delta T.$$

Коэффициент пропорциональности получил название удельной теплоёмкости.

$$c = \frac{Q}{m\Delta T}, \quad [c] = \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Удельной теплоемкостью вещества называется физическая величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания единицы массы вещества на один градус.

Теплоёмкостью какого-либо тела называется величина, равная количеству теплоты, необходимой для нагревания этого тела на один градус.

$$Q = C_T \Delta T, \quad C_T = \frac{Q}{\Delta T}, \quad [C_T] = \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Молярной теплоёмкостью вещества называется величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 моля вещества на 1 градус.

$$Q = C_V \Delta T, \quad C_V = \frac{Q}{\Delta T}, \quad [C_V] = \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}.$$

Поскольку

$$cm\Delta T = C_V \Delta T, \quad \text{или} \quad cm\Delta T = C \frac{m}{M} \Delta T,$$

$$c = \frac{C}{M}, \quad C = cM.$$

Величина теплоёмкости зависит от условий нагревания.

Различают теплоёмкости при постоянном объёме и при постоянном давлении:

c_V и C_V при $V = \text{const}$,

c_p и C_p при $p = \text{const}$.

Найдём связь C_V и C_p .

При $V = \text{const}$ $Q = \Delta U$,

$$Q = C_V \nu \Delta T \rightarrow \Delta U = C_V \nu \Delta T.$$

Физика

$$\text{Т. к. } \Delta U = \frac{i}{2} \nu R \Delta T, \quad C_V \nu \Delta T = \frac{i}{2} \nu R \Delta T \quad \rightarrow \quad C_V = \frac{i}{2} R.$$

$$\text{При } p = \text{const} \quad Q = \Delta U + A$$

$$Q = C_p \nu \Delta T, \quad \Delta U = C_V \nu \Delta T, \quad A = p \Delta V,$$

$$pV = \frac{m}{M} RT, \quad p \Delta V = \frac{m}{M} R \Delta T, \quad A = \frac{m}{M} R \Delta T = \nu R \Delta T,$$

$$C_p \nu \Delta T = C_V \nu \Delta T + \nu R \Delta T \quad \rightarrow \quad C_p = C_V + R - \text{уравнение Майера.}$$

$$\text{Поскольку } C_V = \frac{i}{2} R,$$

$$C_p = \frac{i}{2} R + R = \frac{i+2}{2} R.$$

$$\text{Величина } \gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}$$

представляет собой характерную для каждого газа величину, которая зависит от числа атомов в молекуле газа, она называется коэффициентом Пуассона.

$$\text{Для одноатомного газа } i = 3, \quad \gamma = \frac{5}{3},$$

$$\text{для двухатомного} \quad i = 5, \quad \gamma = \frac{7}{5},$$

$$\text{для многоатомного} \quad i = 6, \quad \gamma = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

Лекция 13. Основы термодинамики (продолжение).

13.1 Применение I закона термодинамики к изопроцессам. Адиабатный процесс.

Как было ранее установлено,

$$Q = \Delta U + A, \quad Q = C_V \Delta T, \quad A = \int p dV, \quad \Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R \Delta T.$$

1. Изохорный процесс ($V = \text{const}$).

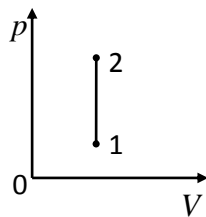


Рис. 1

Диаграмма этого процесса в координатах p, V изображается прямой, параллельной оси ординат (рис. 1). Газ при этом не совершает работы, $A=0$.

$$Q = \Delta U.$$

Вся теплота, сообщаемая газу, идёт на увеличение его внутренней энергии.

$$Q = \frac{m}{M} C_V \Delta T, \quad \Delta U = Q = \frac{m}{M} C_V \Delta T.$$

2. Изобарный процесс ($p = \text{const}$, рис. 2).

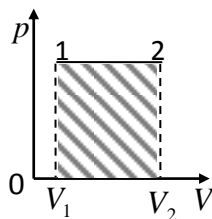


Рис. 2

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1) = p \Delta V,$$

$$Q = \Delta U + A.$$

Используем уравнение Менделеева-Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{M} RT, \quad p \Delta V = \frac{m}{M} R \Delta T, \quad A = \frac{m}{M} R \Delta T.$$

$$\text{Т.к. } p = \text{const}, \quad Q = C_p \Delta T, \quad \Delta U = \frac{m}{M} C_V \Delta T.$$

3. Изотермический процесс ($T = \text{const}$, рис. 3).

$$\text{Т.к. } T = \text{const}, \quad \Delta T = 0, \quad \Delta U = 0, \quad Q = A.$$

Вся теплота, сообщаемая газу, идет на совершение работы против внешних сил. Найдем работу газа при изотермическом расширении:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV, \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}.$$

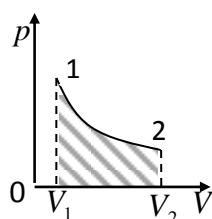


Рис. 3

Согласно уравнению Менделеева-Клапейрона,

$$pV = \frac{m}{M} RT, \quad p = \frac{mRT}{VM},$$

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{mRT}{M} \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} RT \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2},$$

$$Q = A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Физика

Адиабатным называется процесс, происходящий в системе без теплообмена с внешней средой.

Близкими к адиабатным являются все быстропротекающие процессы, например, быстрое сжатие или расширение, происходящие так, чтобы система не успела обменяться теплом с внешней средой.

Адиабатные процессы применяются в двигателях внутреннего сгорания (расширение и сжатие горючей смеси в цилиндрах), в холодильных установках и т.п.).

$Q = 0$, $\Delta U + A = 0$, $A = -\Delta U$ – адиабатное расширение, температура уменьшается.

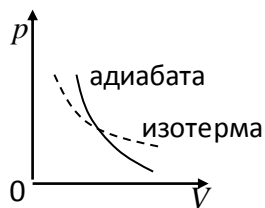


Рис. 4

Работа газа над внешними телами совершается за счет его внутренней энергии. При этом его внутренняя энергия (и температура) уменьшается. Т.о., при адиабатном расширении газ охлаждается.

$\Delta U = -A$ – адиабатное сжатие, температура растет, внутренняя энергия увеличивается за счет работы внешних сил над газом.

Уравнение адиабатного процесса или уравнение Пуассона:

$$pV^\gamma = \text{const},$$

где γ - показатель адиабаты или коэффициент Пуассона.

Это же уравнение имеет другие формы записи:

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}, \quad T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const}.$$

Диаграмма процесса называется адиабатой (рис. 4)

Работа, совершаемая газом при адиабатном процессе, выражается формулами:

$$A = \frac{m}{M} C_v (T_1 - T_2) \quad \text{или} \quad A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right).$$

13.2 Тепловые двигатели, их КПД. Цикл Карно.

Все термодинамические процессы, протекающие в замкнутой системе, подразделяющиеся на обратимые и необратимые.

Термодинамический процесс называется обратимым, если, протекая в обратном направлении, он возвращает систему в исходное состояние без затрат энергии.

(упругая деформация тел, незатухающие колебания).

Все изопроцессы идеального газа являются обратимыми. В противном случае процесс называется необратимым.

Все реальные процессы необратимы, т.к. их нельзя провести в обратном направлении без затраты дополнительной энергии (расширение газа в пустоту, затухающие колебания, взрыв).

Если прямой необратимый процесс ABC дополнить обратным процессом СДА, то получим замкнутый процесс, называемый круговым или циклом (рис. 5).

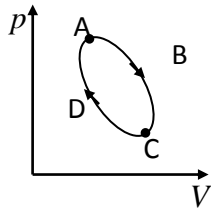


Рис. 5

Круговым процессом или **циклом** называется такой процесс, при котором система после ряда изменений возвращается в исходное состояние.

Цикл изображается замкнутой кривой.

Циклы могут состоять как из обратимых, так и необратимых процессов. Цикл, состоящий из обратимых процессов, называется обратимым.

Тепловой двигатель - это система, совершающая многократно круговой процесс (цикл), при котором за счёт подведённого извне тепла совершается механическая работа. Для этого необходимо рабочему веществу в начале цикла сообщать некоторое количество теплоты Q_1 , а в конце цикла отнимать количество теплоты Q_2 .

Принцип действия теплового действия представлен на рис. 6.

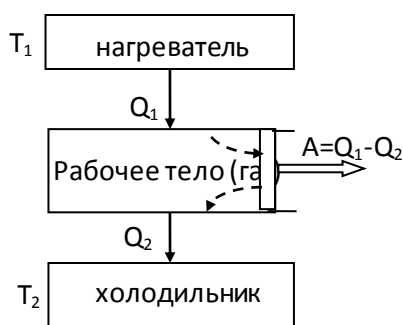


Рис. 6

Рабочее тело приводится в контакт с нагревателем и получает от него количество теплоты Q_1 . При этом температура газа повышается, он расширяется и перемещает поршень, совершая работу A_1 . Затем рабочее тело приводится в контакт с холодильником, отдает ему Q_2 , газ охлаждается и сжимается, перемещая поршень в обратном направлении, что равносильно совершению газом отрицательной работы A_2 . После установления теплового равновесия с

холодильником рабочее тело вновь приводится в контакт с нагревателем; цикл завершен.

Количество получаемого за цикл тепла равно Q_1 , а отданного Q_2 . Их разность перешла в полезную работу:

$$A_{\text{пол.}} = Q_1 - Q_2.$$

Разные тепловые машины, получив одинаковое количество теплоты, могут совершать разную полезную работу. Способность разных тепловых двигателей превращать тепловую энергию в работу характеризуется их коэффициентом полезного действия (КПД).

КПД теплового двигателя называется величина, равная отношению совершаемой за цикл полезной работы ко всему количеству теплоты, полученному от нагревателя:

$$\eta = \frac{A_{\text{пол.}}}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

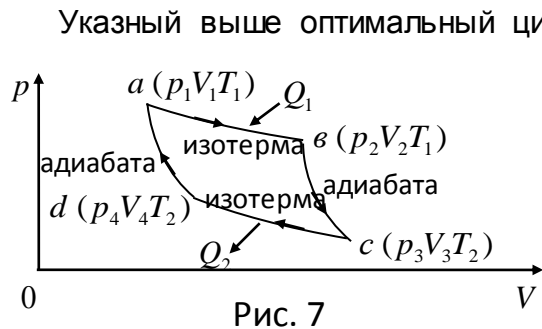
При рассмотрении работы тепловой машины не было оговорено, из каких процессов состоит её цикл: обратимых или необратимых.

В случае необратимых процессов только часть разности $Q_1 - Q_2$ перейдет в полезную работу, остальная часть энергии рассеется в окружающем пространстве.

Следовательно, КПД тепловой машины, работающей на обратимых циклах, всегда больше КПД такой же машины, работающей на реальных (необратимых) циклах.

Для практических целей очень важно найти метод расчёта КПД идеальной тепловой машины, работающей на обратимом цикле. Тогда, основываясь на том, что $\eta_r < \eta_{ид}$, можно будет оценить возможность реальной тепловой машины.

Как было сказано, все изопроцессы являются обратимыми и из них можно построить идеальный цикл. Поскольку каждый изопроцесс характеризуется соответствующей работой, которую с его помощью можно совершить, КПД различных идеальных циклов различны. В термодинамике показывается, что максимальным КПД обладает цикл, составленный из двух изотерм и двух адиабат. Этот цикл называется циклом Карно.



Указный выше оптимальный цикл был рассмотрен французским инженером Сади Карно в 1824г. Выбор именно этих изопроцессов обусловлен тем, что при изотермическом процессе вся подведённая системе теплота идёт на совершение работы, а адиабатическое изменение температуры происходит без теплообмена с окружающей средой, т.е. без потерь.

Круговой процесс (цикл), состоящий из 2-х изотерм и 2-х адиабат, называется **циклом Карно** (рис.7).

$a \rightarrow b$ - изотермическое расширение.

За счет получения газом количества теплоты Q_1 газ изотермически расширяется, переходя из состояния "a" в состояние "b". При этом всё Q_1 переходит в работу A_1 , поскольку $\Delta U = 0$.

$$Q_1 = A_1, A = \frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \quad - \text{ работа, совершенная газом при изотермическом}$$

расширении.

$b \rightarrow c$ - адиабатное расширение.

В состоянии "b" "нагреватель убирают и газ, адиабатно расширяясь, переходит в состояние "c". При этом работа совершается газом за счет убыли его внутренней энергии, и температура газа понижается до T_2 , $T_2 < T_1$.

$$A_2 = -\Delta U, A_2 = \frac{m}{M} C_v (T_1 - T_2) \quad - \text{ работа, совершаемая газом при адиабатном}$$

расширении.

$c \rightarrow d$ - изотермическое сжатие.

В точке "c" газ вводят в контакт с холодильником. Газ, изотермически сжимаясь, переходит в состояние "d" и отдаёт холодильнику количество теплоты Q_2 .

$$Q_2 = A_3, A_3 = \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4} \quad - \text{ работа над газом при изотермическом сжатии за}$$

счёт отдачи Q_2 холодильнику.

$d \rightarrow a$ - адиабатное сжатие.

Физика

В точке "d" холодильник убирают, и газ под действием внешних сил адиабатно сжимается, повышая при этом свою температуру до T_1 . Система возвращается в исходное состояние "a", цикл завершён.

$$-A_4 = \Delta U, \quad A_4 = \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2) - \text{работа над газом при адиабатном сжатии за}$$

счёт внешних сил.

Т.к. для адиабатных процессов справедливы соотношения:

$$b \rightarrow c: \quad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_3}{V_2} \right)^{\gamma-1},$$

$$d \rightarrow a: \quad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_4}{V_1} \right)^{\gamma-1},$$

следовательно,

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{V_4}{V_1} \quad \text{или} \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

КПД тепловой машины, работающей с идеальным газом по циклу Карно, равен

$$\eta_{\text{уд}} = \frac{A}{Q_1} = \frac{A_1 + A_2 - A_3 - A_4}{A_1} = \frac{\frac{m}{M} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2) - \frac{m}{M} R T_2 \ln \frac{V_3}{V_4} - \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2)}{\frac{m}{M} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Таким образом,
$$\eta_{\text{уд}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Анализ полученного выражения показывает, что чем больше разница между температурами нагревателя и холодильника, тем выше КПД. Это один из путей повышения КПД реальных тепловых двигателей.

13.3 Понятие об энтропии. Второе начало термодинамики.

Рассмотрим обратимый процесс.

Из уравнений для цикла Карно следует, что

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}; \quad 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1};$$

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}, \quad \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}. \quad (1)$$

Уравнение (1) означает, что количество теплоты, полученное или отданное при обратимом процессе, пропорционально температуре.

Отношение $\frac{Q}{T}$ называется приведенным количеством теплоты.

Из (1) следует, что для обратимого цикла Карно

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0.$$

Условились считать Q положительным, когда система поглощает тепло, и отрицательным - когда выделяет.

Q_2 - количество теплоты, отдаваемое рабочим телом холодильнику, поэтому оно отрицательное. Следовательно, можно записать

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0,$$

т.е. для обратимого цикла алгебраическая сумма приведенных количеств теплоты равна нулю:

$$\sum \frac{Q_i}{T_i} = 0,$$

или в дифференциальной форме:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0. \quad (2)$$

Интеграл берется по замкнутому контуру, т.к. рассматривался цикл - круговой процесс.

$\frac{\delta Q}{T}$ - приведенное количество теплоты, сообщаемое телу на бесконечно малом участке процесса.

Из равенства нулю интеграла (2), взятого по замкнутому контуру, следует, что подынтегральное выражение $\frac{\delta Q}{T}$ есть полный дифференциал некоторой функции, которая определяется только состоянием системы и не зависит от пути, каким система пришла в это состояние.

Таким образом,

$$\frac{\delta Q}{T} = dS \text{ - элементарная энтропия, } [s] = \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Функция состояния, дифференциалом которой является $\frac{\delta Q}{T}$, называется **энтропией**.

Изменение энтропии при переходе системы из состояния 1 в состояние 2

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

При обратимом процессе

$$\Delta S = \oint \frac{dQ}{T} = 0. \quad (3)$$

При необратимом процессе $\Delta S > 0$:

$$\eta_{\text{н}} > \eta_p, \quad \frac{T_1 - T_2}{T_1} > \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \quad 1 - \frac{T_2}{T_1} > 1 - \frac{Q_2}{Q_1}, \quad \frac{Q_2}{Q_1} > \frac{T_2}{T_1}, \quad \frac{Q_2}{T_2} > \frac{Q_1}{T_1}.$$

$$\Delta S = \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} > 0. \quad (4)$$

Физика

Соотношения (3) и (4) можно представить в виде неравенства Клаузиуса :

$$\Delta S \geq 0,$$

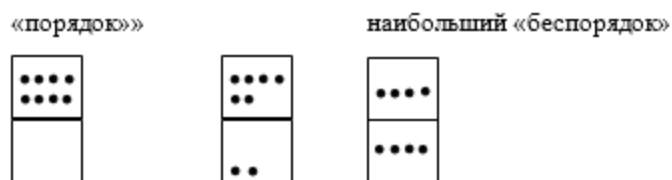
т.е. энтропия замкнутой системы может либо возрасть (при необратимых процессах), либо оставаться постоянной (при обратимых процессах). Это означает, что изменение энтропии в замкнутой системе есть мера необратимости совершающихся в ней процессов.

Само слово "энтропия" происходит от греческого глагола "энтропив" - преобразовать, превратить, и было предложено одним из основоположников термодинамики Клаузиусом.

Наиболее чёткий смысл энтропии дал Больцман в 1877г., введя в теорию теплоты статистические представления. Он приписал каждому состоянию системы "термодинамическую вероятность" W .

Термодинамическая вероятность W равна количеству способов, которыми можно реализовать данное состояние. W тем больше, чем более беспорядочным или неопределённым является состояние.

Действительно, если "порядок" можно осуществить сравнительно небольшим числом способов, то "беспорядок" - очень большим.



$$W = C_8^8 = 1; \quad W = C_8^2 = C_8^6 = \frac{8!}{2!6!} = 28; \quad \boxed{}.$$

Чем больше число элементов в системе, тем большее значение принимает W .

Больцманом было показано, что логарифм W связан с S следующим образом:

$$S = k \ln W, \text{ где } k - \text{постоянная Больцмана.}$$

При таком подходе возрастание энтропии означает, что система, предоставленная самой себе, переходит из одного состояния в другое, W которого больше. С точки зрения статистики энтропия является мерой беспорядка в системе.

Т.о. энтропия замкнутой системы не может уменьшаться, $\Delta S \geq 0$

Это утверждение носит название **второго закона термодинамики**.

Его можно сформулировать по-другому, но смысл от этого не изменится.

Некоторые формулировки:

- невозможен самопроизвольный процесс перехода тепла от тела, менее нагретого, к телу, более нагретому;
- невозможен процесс, единственным результатом которого было бы полное превращение тепла в работу;
- невозможно создать вечный двигатель второго рода.

В состоянии равновесия энтропия системы достигает максимального значения.

Физика

Стремления любой системы к самопроизвольному увеличению энтропии, приводящее к выравниванию во всех частях системы температуры, было использовано идеалистами для создания теории "тепловой смерти" Вселенной. По этой теории, энтропия Вселенной в конце концов должна достигнуть максимума, температура во всей Вселенной должна выровняться и всякое движение материи - прекратиться. Однако это не так. Законы статистической физики справедливы для огромного, но не бесконечного числа тел. В бесконечной Вселенной возможны процессы менее вероятные, протекающие с уменьшением энтропии, вследствие чего "тепловая смерть" Вселенной не наступает никогда, движение материи вечно и неуничтожимо.

III начало термодинамики (принцип Нернста): при любом изотермическом процессе при $T=0$, $\Delta S=0$, $S=S_0=\text{const}$, или (в формулировке Планка): при $T=0$ энтропия системы равна 0.

Из 3го начала следует, что невозможен такой процесс, в результате которого тело могло быть охлаждено до $T=0$.

Лекция 14. Электростатическое поле

Электрические заряды, их свойства и классификация. Закон Кулона.

Электрический заряд - физическая величина, характеризующая интенсивность электромагнитного взаимодействия тел. Сам по себе электрический заряд не существует, его носителем может быть только частица вещества.

Основные свойства

1.Двойственность: в природе существуют заряды двух знаков, одноименные отталкиваются, разноименные притягиваются. В связи с этим заряды условного разделены на положительные и отрицательные.

Положительным назван заряд, которым обладает стеклянная палочка, потертая о шелк или бумагу.

Отрицательный - заряд, которым обладает янтарная или эбонитовая палочка, потертая о мех или шерсть.

2.Квантование: если физическая величина принимает только определенные дискретные значения, говорят, что она квантуется (дискретна). Опыт показывает, что любой электрический заряд квантуется, т.е. состоит из целого числа элементарных зарядов:

$$q = Ne,$$

где $N = 1, 2, \dots$ целое число; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ - элементарный заряд.

Наименьшим (элементарным) отрицательным зарядом обладает электрон, положительным - протон.

$$[q] = 1 \text{ Кл}$$

1 кулон - заряд, проходящий через поперечное сечение проводника за одну секунду, когда по проводнику идет постоянный ток силой один ампер.

3.Сохранение заряда.

Электрические заряды могут исчезать и возникать вновь только парами. В каждой такой паре заряды равны по величине и противоположны по знаку. Например, электрон и позитрон при встрече аннигилируют, т.е. превращаются в нейтральные γ - фотоны, при этом исчезают заряды $-e$ и $+e$. В ходе процесса, называемого рождением пары, γ - фотон, попадая в поле атомного ядра, превращается в пару частиц электрон и позитрон, при этом возникают заряды $-e$ и $+e$.

Закон сохранения заряда: в изолированной системе алгебраическая сумма зарядов остается постоянной величиной при всех изменениях внутри системы.

Изолированной называется система тел, которая не обменивается зарядами с внешней средой.

4.Инвариантность заряда к различным инерциальным системам отсчета.

Опыт показывает, что величина заряда не зависит от скорости движения заряженного тела. Один и тот же заряд, измеренный в разных инерциальных системах отсчета, одинаков.

5.Аддитивность: $q = \sum_{i=1}^n q_i$.

Классификация зарядов.

В зависимости от размеров заряженного тела заряды делят на точечные и протяженные.

- Точечными зарядом называют заряженное тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи.

- Протяженным называется заряд тела, размерами которого в условиях данной задачи пренебречь нельзя. Протяженные заряды делятся на линейные, поверхностные и объемные.

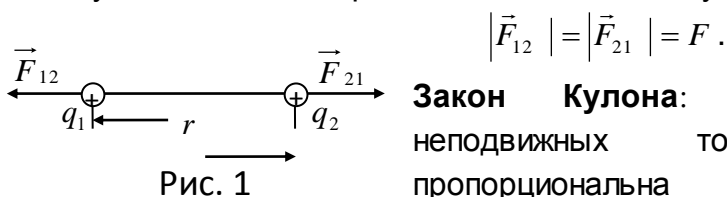
По способности смещаться относительно положения равновесия под действием внешнего эл. поля заряды условно делят на свободные, связанные и сторонние.

Свободными называют заряды, способные свободно перемещаться в теле под действием внешнего эл. поля.

Связанными называют заряды, входящие в состав молекул диэлектриков, которые под действие эл. поля могут лишь смещаться из своего положения равновесия, но покинуть молекулу не могут.

Сторонними называются заряды, находящиеся на диэлектрике, но не входящие в состав его молекул.

Закон, которому подчиняется сила взаимодействия точечных зарядов (рис. 1), был установлен экспериментально в 1785г. Кулоном.



$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = F.$$

Закон Кулона: сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов прямо пропорциональна зарядам, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними,

направлена вдоль прямой, соединяющей заряды, и зависит от среды, в которой они находятся.

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2},$$

где q_1, q_2 - величины зарядов; r - расстояние между зарядами;

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/(\text{Н} \cdot \text{м}^2)$ - электрическая постоянная;

ϵ - диэлектрическая проницаемость среды.

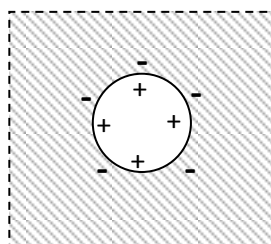


Рис. 2

Диэлектрическая проницаемость вещества показывает, во сколько раз сила взаимодействия зарядов в данном диэлектрике меньше, чем в вакууме, $\epsilon_{\text{вакуума}}=1$, ϵ - безразмерная величина.

Объясним причину этого ослабления, для чего рассмотрим заряженный шарик, окруженный диэлектриком (рис. 2). Поле шарика ориентирует молекулы диэлектрика, и на поверхности диэлектрика, примыкающей к шарiku, появляются отрицательные связанные заряды.

Поле в любой точке диэлектрика будут создавать две противоположно заряженные сферы: поверхность шарика, заряженная положительно, и примыкающая к ней отрицательно заряженная поверхность диэлектрика, при этом из поля свободных зарядов вычитается поле связанных зарядов, и суммарное поле будет более слабым, чем поле одного шара.

14.2 Напряженность электростатического поля. Принцип суперпозиции электрических полей. Поток вектора \vec{E} .

Всякий заряд изменяет свойства окружающего пространства - создает в нем электрическое поле.

Электрическое поле - одна из форм существования материи, окружающей электрические заряды. Это поле проявляет себя в том, что помещенный в какую-либо его точку электрический заряд оказывается под действием силы.

Представление об электрическом поле было введено в науку в 30-х годах XIX столетия английскими учеными Майклом Фарадеем.

Согласно Фарадею, каждый электрический заряд окружен созданным им электрическим полем, поэтому такой заряд иногда называют зарядом-источником. Заряд, с помощью которого исследуют поле заряда источника, называют пробным зарядом.

Для того чтобы сила, действующая на пробный заряд, характеризовала поле в данной точке, пробный заряд должен быть точечным.

Точечным зарядом называют заряженное тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи, т.е. размеры которого малы по сравнению с расстояниями до других тел, с которыми он взаимодействует. При этом собственное электрическое поле пробного заряда должно быть столь мало, чтобы оно не изменяло поле заряда - источника. Чем меньше размер заряженного тела и чем слабее его собственное поле по сравнению с полем заряда - источника, тем точнее данное заряженное тело удовлетворяет условию пробного заряда.

Электрическое поле распространяется в вакууме со скоростью $c = 3 \cdot 10^8 \frac{м}{с}$.

Поле неподвижных электрических зарядов - электростатическое.

Исследуем с помощью пробного заряда q поле, создаваемое неподвижным зарядом - источником $q_{ист}$ (рис. 3).

Сила, действующая на пробный заряд в данной точке поля, зависит от величины пробного заряда. Если брать различные пробные заряды, то и сила, действующая на них в данной точке поля, будет различной.

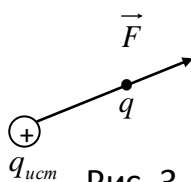


Рис. 3

Однако отношение силы к величине пробного заряда остается постоянным и характеризует уже само поле. Это отношение называется напряженностью электрического поля в данной точке.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}, \quad [E] = \frac{Н}{Кл}.$$

Напряженность электрического поля - это векторная величина, численно равная силе, с которой поле действует на единичный положительный пробный заряд в данной точке поля и сонаправленная с этой силой.

Напряженность является основной характеристикой поля и полностью характеризует поле в каждой его точке по величине и направлению.

Напряженность поля точечного заряда.

Согласно закону Кулона

$$F = \frac{q_{\text{ист}}q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2},$$

поэтому

$$E = \frac{F}{q} = \frac{q_{\text{ист}}q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2 q} = \frac{q_{\text{ист}}}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}.$$

Следовательно, напряженность электрического поля точечного заряда q на расстоянии r от этого заряда выражается формулой:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}.$$

Электрическое поле удобно графически изображать с помощью картины так называемых силовых линий или линий напряженности.

Линией напряженности называется линия, касательная к которой в каждой точке совпадает по направлению с вектором напряженности в этой точке.

Линии напряженности поля, создаваемого неподвижными зарядами (рис. 4, а, б), всегда начинаются и кончаются на зарядах q (или в бесконечности) и никогда не бывают замкнутыми. Более сильное поле изображается более плотно расположенными линиями напряженности. Густота линий выбирается так, чтобы количество линий, пронизывающих единицу поверхности площадки, перпендикулярной к линиям, было равно численному значению вектора \vec{E} . Линии напряженности никогда не пересекаются, т.к. их пересечение означало бы два различных направления вектора напряженности поля в одной и той же точке, что не имеет смысла.

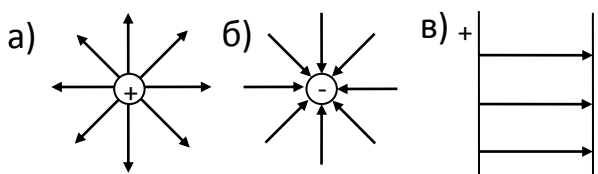


Рис. 4

Однородным называется поле, в котором напряженность во всех точках имеет одну и ту же величину и одинаковое направление, $\vec{E} = \text{const}$. В таком поле силовые линии параллельны и плотность их всюду одинакова, т.е. они расположены на одинаковом расстоянии друг от друга (рис. 4, в).

Принцип суперпозиции.

Если электрическое поле в данной точке создано несколькими зарядами, то напряженность результирующего поля равна векторной сумме напряженностей полей, созданных каждым зарядом в отдельности (рис. 5).

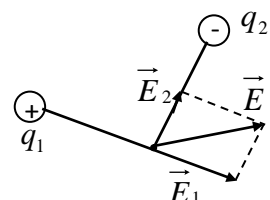


Рис. 5

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i,$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

Принцип суперпозиции является опытным фактом, справедливым вплоть до очень сильных полей. Поэтому же закону складываются не только статические, но и быстро меняющиеся электромагнитные поля.

Выделим в векторном поле \vec{E} некоторый объем, ограниченный поверхностью S . Разобьем эту поверхность на элементарные площадки величиной dS (рис. 6).

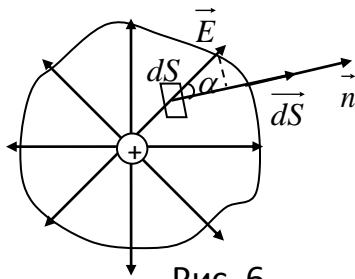


Рис. 6

Можно ввести в рассмотрение направленный элемент поверхности dS . Направленным элементом поверхности dS называется вектор, длина которого равна площади элемента dS , а направление совпадает с направлением нормали к этому элементу. Для замкнутой поверхности берется внешняя нормаль к поверхности. Поскольку выбор направления \vec{n} произволен (условен), его можно направить как в одну

сторону от площадки, так и в другую, $d\vec{S}$ является не истинным вектором, а псевдовектором.

Потоком $d\Phi_E$ вектора напряженности \vec{E} через элементарную поверхность dS называется скалярное произведение

$$d\Phi_E = (\vec{E} d\vec{S}) = E dS \cos \alpha = E_n dS, \text{ где } \alpha - \text{угол между векторами } \vec{E} \text{ и } \vec{n},$$

E_n - проекция \vec{E} на направление нормали \vec{n} .

Просуммировав потоки через все элементарные площадки, на которые разбили поверхность S , получим поток вектора \vec{E} через поверхность S .

Потоком вектора \vec{E} через поверхность S называется интеграл

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} d\vec{S} = \int_S E_n dS; \quad [\Phi] = \frac{H}{Kл} \cdot M^2$$

Для замкнутой поверхности $\Phi_E = \oint_S E_n dS$.

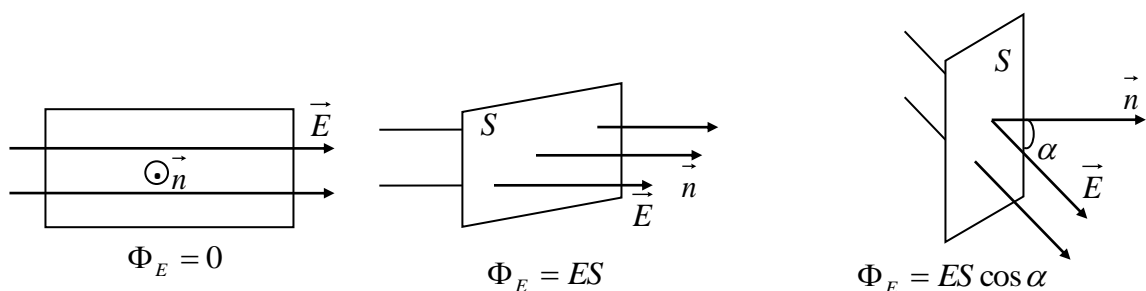


Рис. 7

Поток вектора - алгебраическая величина:
если

$$\begin{cases} \alpha < \frac{\pi}{2}, \cos \alpha > 0, & \Phi_E > 0 \\ \alpha > \frac{\pi}{2}, \cos \alpha < 0, & \Phi_E < 0 \end{cases}$$

Для однородного поля $\vec{E} = \text{const}, E_n = \text{const}$ (рис. 7),

$$\Phi_E = \int_S E_n dS = E_n S = E \cos \alpha S = (\vec{E} \vec{S}).$$

Потоку вектора напряженности можно дать наглядную геометрическую интерпретацию: Φ_E численно равен количеству линий напряженности, пересекающих данную поверхность.

14.3 Теорема Гаусса для потока вектора \vec{E} и ее применение для расчета полей протяженных зарядов в вакууме.

Зная напряженность поля точечного заряда и используя принцип суперпозиции, можно рассчитать напряженность поля, созданного несколькими точечными зарядами. Однако для протяженных зарядов применение принципа суперпозиции затруднительно. Метод расчета полей, созданных протяженными зарядами, был предложен немецким ученым Гауссом в начале 19 века.

Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме.

Рассмотрим поле точечного заряда q в вакууме и вычислим Φ_E через поверхность сферы радиуса r (рис. 8).

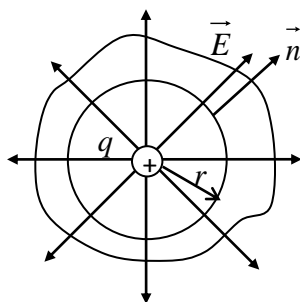


Рис. 8

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS.$$

Напряженность поля в любой точке поверхности сферы

$$E_n = E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad S_{\text{сфера}} = 4\pi r^2,$$

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Т.к. Φ_E численно равен числу линий вектора \vec{E} , пересекающих эту поверхность, то, если вместо сферы взять любую другую замкнутую поверхность, поток останется тем же, т.к. все линии, проходящие через сферу, проходят и через эту поверхность. Таким образом, для любой замкнутой поверхности, заключающей в себе точечный заряд q

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0}.$$

Если внутри замкнутой поверхности находятся N точечных зарядов, то согласно принципу суперпозиции:

$$\text{если } q = \sum_i q_i, \text{ то } \vec{E} = \sum_i \vec{E}_i,$$

Физика

поэтому $\Phi_E = \oint_S \vec{E}_n d\vec{S} = \oint_S \left(\sum_i \vec{E}_i \right) d\vec{S} = \sum_i \oint_S \vec{E}_i d\vec{S} = \sum_i \frac{q_i}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i$,

т.к. каждый интеграл $\oint_S \vec{E}_i d\vec{S} = \frac{q_i}{\varepsilon_0}$.

Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме: $\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i$.

Поток вектора напряженности электростатического поля в вакууме через любую замкнутую поверхность прямо пропорционален алгебраической сумме зарядов, охватываемых этой поверхностью.

Суть метода Гаусса:

- охватывать участок, содержащий заряды, замкнутой поверхностью;
- выразить Φ_E через эту поверхность;
- выразить суммарный заряд через τ или σ ;
- приравнять Φ_E суммарному заряду, деленному на ε_0 ;
- из полученного соотношения найти E .

Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости.

Поверхностная плотность заряда - физическая величина, равная заряду, приходящемуся на единицу площади равномерно заряженной поверхности.

$$\sigma = \frac{q}{S}; \quad [\sigma] = 1 \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}; \quad q = \sigma \cdot S.$$

Если поверхность заряжена неравномерно,

$$\sigma = \frac{dq}{dS}, \quad q = \int_S \sigma dS.$$

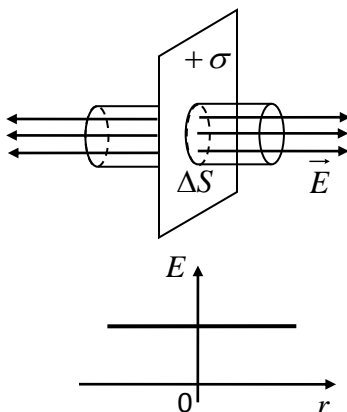


Рис. 9

Поле такой поверхности однородно. Окружим элемент ΔS этой поверхности замкнутой поверхностью в форме цилиндра (рис. 9). $\Phi_{E_{бок}} = 0$ - поток \vec{E} через боковую поверхность равен нулю, т.к. линии \vec{E} не пересекают ее.

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_i;$$

$$\Phi_E = \Phi_{E_{оч}} = 2E\Delta S,$$

$$\sum q_i = \sigma \Delta S;$$

$$2E\Delta S = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma \Delta S \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Поле 2-х бесконечных разноименно заряженных плоскостей (рис. 10).

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \quad |\vec{E}_1| = |\vec{E}_2|,$$

$$E = 2E_1 = 2 \cdot \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

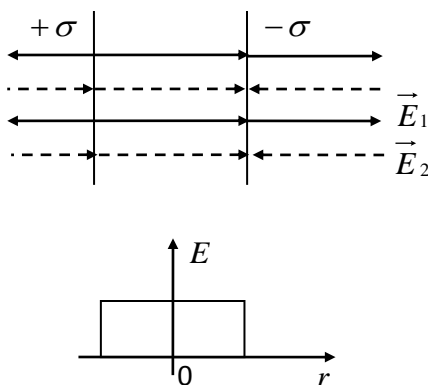


Рис. 10

Полученный результат справедлив для плоскостей конечных размеров, расстояние между которыми мало по сравнению с их размерами (конденсатор).

Физика

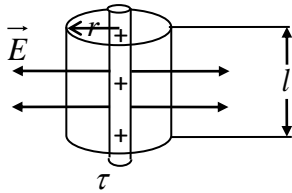


Рис. 11

Поле бесконечного равномерно заряженного цилиндра (рис. 11).

Линейная плотность заряда - физическая величина, численно равная заряду, приходящемуся на единицу длины равномерно заряженной нити.

$$\tau = \frac{q}{l}, \quad [\tau] = \frac{Кл}{м}, \quad q = \tau l.$$

Если нить заряжена неравномерно,

$$\tau = \frac{dq}{dl}; \quad q = \int_l \tau dl; \quad \Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i;$$

$$\Phi_E = \Phi_{оч} + \Phi_{бок} = 0 + E 2\pi r l; \quad \sum q_i = \tau l$$

$$E 2\pi r l = \frac{1}{\epsilon_0} \tau l \Rightarrow E = \frac{\tau}{2\pi r \epsilon_0}.$$

Поле равномерно заряженной сферы радиуса R (рис. 12).

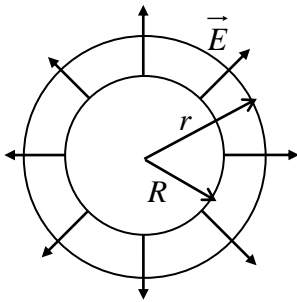


Рис. 12

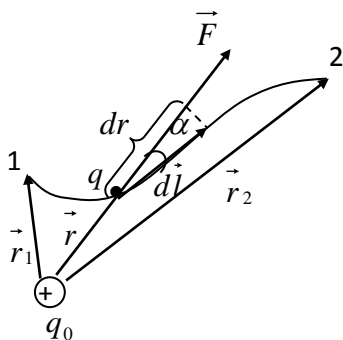
$$\Phi = E 4\pi r^2, \quad \sum q_i = \sigma 4\pi R^2$$

$$E 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma 4\pi R^2 \Rightarrow E = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}.$$

Лекция 15. Потенциал электростатического поля. Диэлектрики в электростатическом поле.

15.1 Работа при перемещении заряда в электростатическом поле. Потенциал. Разность потенциалов.

В любой точке поля, создаваемого неподвижным зарядом q_0 , на заряд q действует сила



$$F = \frac{q_0 \cdot q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}.$$

Если заряд q перемещается из точки 1 в точку 2, то эта сила совершает работу.

Работа при элементарном перемещении dl выражается формулой

$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{l}) = F dl \cos \alpha = F dr$, где dr - проекция $d\vec{l}$ на направление силы \vec{F} , т.е. приращение радиус-вектор \vec{r} .

Работа при перемещении из точки 1 в точку 2:

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} dA = \int_{r_1}^{r_2} F dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Из полученного выражения следует, что работа в электростатическом поле не зависит от траектории перемещения заряда, а определяется только положениями начальной 1 и конечной 2 точек. Следовательно, электростатическое поле является потенциальным, а электростатические силы - консервативными.

Тело, находящееся в потенциальном поле сил (а электростатическое поле является потенциальным), обладает потенциальной энергией, за счет которой силами поля совершается работа. Как известно из механики, работа консервативных сил совершается за счет убыли потенциальной энергии. Поэтому работу можно представить как разность потенциальных энергий, которыми обладает заряд q в начальной (1) и конечной (2) точках:

$$A_{12} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_1} - \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_2} = W_{p1} - W_{p2}, \text{ откуда следует, что потенциальная энергия}$$

заряда q в поле заряда q_0 равна

$$W_p = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} + C,$$

которая, как и в механике, определяется не однозначно, а с точностью до произвольной постоянной C . Если считать, что при удалении заряда q в

Физика

бесконечность ($r \rightarrow \infty$) потенциальная энергия обращается в нуль ($W_p = 0$), то $C=0$.

Потенциальная энергия заряда q в поле заряда q_0 на расстоянии r от него:

$$W_p = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r},$$

для одноименных зарядов $qq_0 > 0$, $W_p > 0$,

для разноименных зарядов $qq_0 < 0$, $W_p < 0$.

Разные заряды q_i будут обладать в одной и той же точке поля различной энергией W_{pi} , однако отношение $\frac{W_{pi}}{q_i}$ в данной точке для всех зарядов будет

одинаково и называется потенциалом электростатического поля в данной точке:

$$\varphi = \frac{W_p}{q}; \quad [\varphi] = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \text{В}.$$

Потенциал поля в данной точке - это скалярная физическая величина, численно равная потенциальной энергии, которой обладает единичный положительный заряд в данной точке поля.

1 В - это потенциал точки поля, в которой положительный заряд в 1 Кл обладает потенциальной энергией 1 Дж.

Потенциал - энергетическая характеристика поля. Условно принято считать более высоким потенциал той точки поля, которая ближе к положительному заряду - источнику поля.

Потенциал в некоторой точке поля, созданного системой зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов полей, созданных каждым зарядом в отдельности: если $q_{об} = \sum q_i$, $\varphi_{об} = \sum \varphi_i$.

Потенциал поля точечного заряда q_0 на расстоянии r от него (или сферы радиусом r с зарядом q_0):

$$\varphi = \frac{W}{q} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r \cdot q} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

$$\text{Т.к.} \quad \varphi = \frac{W}{q} \Rightarrow W = q\varphi.$$

В точке с потенциалом φ_1 заряд q обладает потенциальной энергией

$$W_{p1} = q\varphi_1,$$

в точке с потенциалом φ_2 :

$$W_{p2} = q\varphi_2.$$

Работу перемещения заряда из точки с потенциалом φ_1 в точку с φ_2 можно представить как изменение потенциальной энергии:

$$A = W_{p1} - W_{p2} = q\varphi_1 - q\varphi_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \Delta\varphi = U = \frac{A}{q} - \text{разность потенциалов (напряжение) между точками.}$$

Разность потенциалов между двумя точками электростатического поля - физическая величина, численно равная работе по перемещению пробного заряда между этими точками.

Если заряд из точки с потенциалом φ удаляется на бесконечность, где $\varphi_\infty = 0$,

$$A_\infty = q\varphi, \text{ т.е. } \varphi = \frac{A_\infty}{q}$$

Таким образом, потенциал поля в данной точке численно равен работе, совершаемой силами поля над пробным зарядом для удаления его из данной точки на бесконечность.

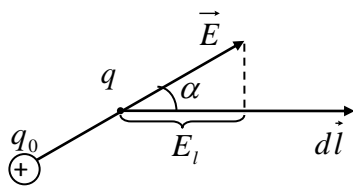
1В - потенциал такой точки поля, для перемещения в которую из бесконечности пробного заряда необходимо совершить работу 1 Дж.

15.2 Связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля.

Эквипотенциальные поверхности.

Как известно из механики, если работа совершается за счет потенциальной энергии, то она равна убыли W_p :

$$dA = -dW_p \quad (1)$$



Определим работу в том случае, когда перемещение $d\vec{l}$ заряда q так мало, что на всем его протяжении силу F можно считать постоянной по величине и направлению

$$dA = (\vec{F}d\vec{l}) = q(\vec{E}d\vec{l}) = qE \cos \alpha \cdot dl = qE_l dl, \quad (2)$$

где E_l - проекция \vec{E} на направление $d\vec{l}$.

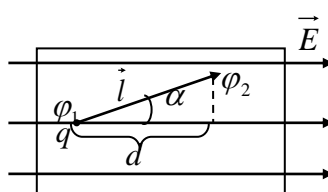
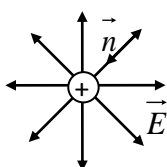
$$\text{Т.к. } W_p = q\varphi, \quad dW_p = qd\varphi. \quad (3)$$

Подставим (2), (3) в (1)

$$qE_l dl = -qd\varphi \Rightarrow E_l = -\frac{d\varphi}{dl}.$$

Таким образом, проекция \vec{E} на произвольное направление \vec{l} равна взятой с обратным знаком производной φ по l , т.е. скорости убывания потенциала вдоль направления \vec{l} .

В электростатическом поле всегда существует направление, вдоль которого скорость изменения потенциала наибольшая. Например, в поле точечного заряда это радиальное направление. Обозначим его \vec{n} .



$$\vec{F} = -\frac{d\varphi}{d\vec{n}} = -q \text{grad} \varphi$$

Напряженность поля \vec{E} равна градиенту потенциала со знаком минус.

Знак минус означает, что вектор \vec{E} направлен в сторону убывания потенциала.

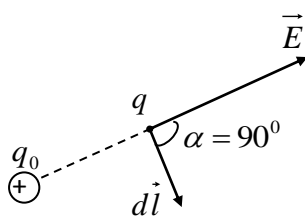
Для однородного поля:

$$A = (\vec{F}\vec{l}) = qEl \cos \alpha = qEd$$

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$qEd = q(\varphi_1 - \varphi_2), \Rightarrow E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d} = \frac{U}{d}.$$

Найдем работу перемещения заряда q в направлении, перпендикулярном линиям \vec{E} .



$$dA = (\vec{F}d\vec{l}) = qEdl \cos \alpha = 0 \text{ (т.к. } \cos 90^\circ = 0 \text{)}.$$

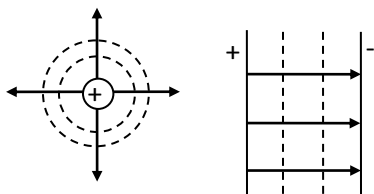
$$\text{С другой стороны, } dA = -dW_n = -qd\varphi,$$

$$\text{т.е. } qd\varphi = 0, \quad d\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \text{const}.$$

Таким образом, изменение потенциала в направлении, перпендикулярном силовым линиям, равно нулю, т.е. в этом направлении потенциал не изменяется. В электрическом поле можно провести поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал.

Воображаемая поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал, называется **эквипотенциальной**.

Работа перемещения заряда по эквипотенциальной поверхности равна нулю, т.к. $\varphi_1 = \varphi_2$.



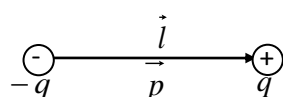
Эквипотенциальные поверхности всегда перпендикулярны линиям \vec{E} . Их условились проводить таким образом, чтобы $\Delta\varphi$ для двух соседних поверхностей была одинакова.

15.3 Диполь в электрическом поле. Поляризация диэлектриков.

Электрическим диполем называется система двух одинаковых по величине разноименных точечных зарядов, расстояние между которыми значительно меньше расстояний до тех точек, в которых определяется поле диполя.

Прямая, проходящая через оба заряда, называется осью диполя.

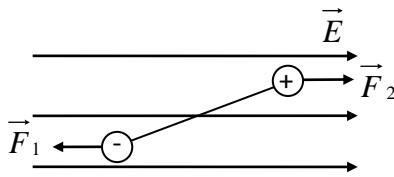
Вектор, соединяющий заряды и направленный от отрицательного заряда к положительному, называется плечом диполя.



Диполь характеризуется электрическим или дипольным моментом: $\vec{p} = ql$, $[\vec{p}] = 1 \text{ Кл} \cdot \text{м}$

Физика

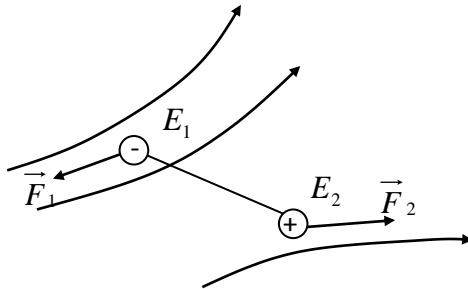
Электрический момент диполя (дипольный момент) - это вектор, численно равный произведению заряда диполя на его плечо и сонаправленный с плечом диполя.



В однородном электрическом поле диполь будет поворачиваться и располагаться вдоль силовых линий. Силы, действующие на оба заряда, равны и противоположно направлены, такая пара сил лишь вращает диполь.

$$F_1 = qE, F_2 = qE,$$

$$F_1 = F_2.$$



В неоднородном поле силы имеют разную величину, поэтому диполь будет не только вращаться, но и втягиваться в область более сильного поля.

$$E_1 > E_2,$$

$$F_1 = qE_1, \quad F_2 = qE_2,$$

$$F_1 > F_2.$$

Диэлектриками (изоляторами) называются вещества, не способные проводить электрический ток. Диэлектрики не имеют свободных зарядов. Заряды, входящие в состав молекул диэлектрика, называются связанными. Под действием поля они могут немного смещаться из своих положений равновесия, но покинуть молекулу не могут.

Молекулы диэлектрика электрически нейтральны, т.к. содержат равное число положительных и отрицательных зарядов.

Диэлектрик называется неполярным, если электроны атомов в его молекулах расположены симметрично относительно ядер (H_2 , O_2 , CCl_4). При этом центры тяжести положительных и отрицательных зарядов совпадают в отсутствие внешнего электрического поля ($p=0$) и дипольный момент молекулы равен нулю.

Диэлектрик называется полярным, если электроны располагаются несимметрично относительно ядер атомов, составляющих молекулу (H_2O , HCN , NH_3). В таких молекулах центры тяжести положительных и отрицательных зарядов не совпадают, находясь, практически, на постоянном расстоянии друг от друга. Такие молекулы обладают постоянным дипольным моментом и по своим электрическим свойствам подобны жестким диполям.

Действие внешнего электрического поля на полярную молекулу сводится в основном к стремлению повернуть молекулу так, чтобы ее дипольный момент ориентировался вдоль поля. На величину \vec{p} внешнее поле практически не влияет.

В неполярной молекуле под действием поля электрические заряды смещаются друг относительно друга, молекула приобретает дипольный момент, величина которого пропорциональна напряженности поля.

Таким образом, в отсутствие внешнего поля дипольные моменты молекул диэлектрика либо равны нулю (у неполярных), либо распределены в пространстве хаотически (у полярных), так что суммарный дипольный момент диэлектрика равен нулю.

Физика

Под действием внешнего поля вследствие ориентации дипольных моментов молекул диэлектрик поляризуется, результирующий дипольный момент диэлектрика становится отличным от нуля, на поверхности диэлектрика появляются связанные электрические заряды.

Поляризация диэлектрика означает, что результирующий дипольный момент диэлектрика становится отличным от нуля.

В качестве величины, характеризующей степень поляризации диэлектрика, естественно взять дипольный момент единицы объема. Если поле или диэлектрик (или они оба) неоднородны, степень поляризации в различных точках будет различна.

Вектором поляризации (поляризованностью) называется отношение дипольного момента малого объема ΔV диэлектрика к величине этого объема

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V}, \quad [\vec{P}] = \frac{Kл \cdot м}{м^3} = \frac{Kл}{м^2}$$

Таким образом, поляризованность определяется дипольным моментом единицы объема диэлектрика.

У изотропных диэлектриков любого типа поляризованность прямо пропорциональна напряженности поля в той же точке:

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E},$$

где χ - диэлектрическая восприимчивость диэлектрика, безразмерная, постоянная для данного диэлектрика величина.

По способности смещаться относительно положения равновесия под действием внешнего электрического поля заряды условно делят на свободные и связанные.

Свободными называют заряды, способные свободно перемещаться в теле под действием внешнего электрического поля (валентные электроны в проводниках, электроны и дырки в полупроводниках).

Связанными называют заряды, входящие в состав молекул диэлектриков, которые под действием внешнего электрического поля могут лишь смещаться из своего положения равновесия, но покинуть молекулу не могут.

Для установления количественных закономерностей поля в диэлектрике внесем в однородное внешнее электрическое поле \vec{E}_0 пластину из однородного диэлектрика; при этом диэлектрик поляризуется, внутри диэлектрика возникает поле связанных зарядов \vec{E}' ,

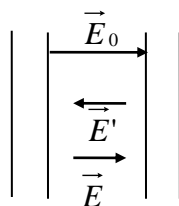
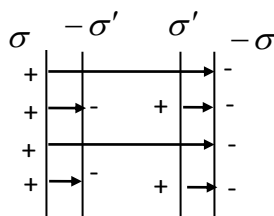
σ - поверхностная плотность свободных зарядов,

σ' - поверхностная плотность связанных зарядов.

$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$ - результирующее поле внутри диэлектрика,

$$E = E_0 - E'$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\sigma - \sigma') \quad (4)$$



Т.к. по определению $\varepsilon = \frac{F_{\varepsilon}}{F_0}$, а $F = Eq$,

$\varepsilon = \frac{E_0 q}{Eq} = \frac{E_0}{E}$ – показывает, во сколько раз поле ослабляется в диэлектрике.

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (5)$$

Подставим (5) в (4)

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma - \sigma'}{\varepsilon_0} \Rightarrow \sigma = \varepsilon \sigma - \varepsilon \sigma',$$

$$\sigma' = \frac{\sigma(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} \quad \text{- СВЯЗЬ } \sigma' \text{ С } \sigma$$

$$\sigma = \frac{\sigma' \varepsilon}{\varepsilon - 1} \quad (6)$$

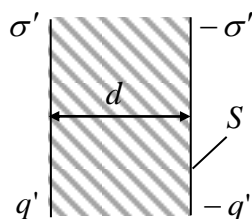
Подставим (6) в (5):

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{\sigma' \varepsilon}{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \varepsilon} \Rightarrow \sigma' = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) E \quad \text{- СВЯЗЬ } \sigma' \text{ С } E.$$

Можно доказать, что $P = \sigma'$, $\varepsilon = \chi + 1$.

Установим связь σ' с \vec{P} .

Полный дипольный момент пластинки диэлектрика



равен

$$\sum p_i = PV = PSd,$$

где S - площадь грани пластинки, d - ее толщина.

С другой стороны, пластинку можно рассматривать как диполь, полный дипольный момент которого равен

$$\sum p_i = q'd = \sigma' Sd,$$

Таким образом, $PSd = \sigma' Sd \Rightarrow \sigma' = P$, где S - площадь грани.

Поверхностная плотность связанных зарядов равна поляризованности диэлектрика P .

Установим связь между ε и χ :

Т.к. $P = \chi \varepsilon_0 E$, $\sigma' = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) E$, $P = \sigma'$, то

$$\chi \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) E \Rightarrow \chi = \varepsilon - 1, \quad \varepsilon = \chi + 1.$$

Помимо основного вектора \vec{E} в теории электричества оказывается необходимо ввести еще вектор электрической индукции \vec{D} (или вектор смещения).

Источником вектора \vec{E} служат свободные и связанные заряды.

Источником вектора \vec{D} служат только свободные заряды.

Как связаны между собой в однородном диэлектрике эти вектора?

Вектор \vec{E} представляет поле свободных и связанных зарядов, вектор \vec{D} - только поле свободных зарядов. Известно, что связанные заряды возникают из-за поляризации диэлектрика полем свободных зарядов. Поле связанных зарядов параллельно полю свободных, направлено в противоположную сторону и пропорционально ему, поэтому вектор \vec{E} и \vec{D} в однородном и изотропном диэлектрике должны быть параллельны и пропорциональны друг другу.

Физика

Поскольку в однородной среде с диэлектрической проницаемостью ε поле свободных зарядов \vec{D} ослабляется средой в ε раз, можно записать

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{D}}{\varepsilon},$$

где $\frac{1}{\varepsilon_0}$ - коэффициент пропорциональности в СИ.

Таким образом, $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$.

$$[D] = 1 \frac{Кл}{м^2}.$$

Векторы \vec{E} и \vec{D} в изотропном диэлектрике параллельны, но численно не совпадают, т.е. плотность линий разная.

Вектор электрической индукции \vec{D} равен произведению скалярной величины ε_0 на вектор электрической напряженности.

Установим связь между $\vec{E}, \vec{D}, \vec{m}$

\vec{D} - характеризует поле свободных зарядов;

\vec{m} - характеризует поле связанных зарядов;

\vec{E} - характеризует поле свободных и связанных зарядов.

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 (x + 1) \vec{E} = \varepsilon_0 x \vec{E} + \varepsilon_0 \vec{E} = \vec{P} + \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{D} = \vec{P} + \varepsilon_0 \vec{E}$$

Лекция 16. Проводники в электрическом поле.

Емкостные проводников и конденсаторов.

Распределение зарядов на проводнике. Проводник во внешнем электрическом поле.

Под словом «проводник» в физике понимается проводящее тело любых размеров и формы, содержащее свободные заряды (электроны или ионы). Для определенности в дальнейшем будем рассматривать металлы.

Если проводнику сообщить некоторый заряд q (рис. 1), то он распределится так, чтобы соблюдалось условие равновесия (т.к. одноименные заряды отталкиваются, они располагаются на поверхности проводника).

1. Если заряды проводника находятся в равновесии, то равнодействующая всех сил, действующих на каждый заряд, равна нулю,

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = 0, \quad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = 0,$$

т.е. в любой точке внутри проводника $E=0$.

2. Т.к. $\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dn} = 0 \Rightarrow \varphi = const$, во всех точках

внутри проводника потенциал постоянен.

3. Поскольку при равновесии заряды не движутся по поверхности проводника, то работа по их перемещению равна нулю:

$$A = q_i(\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = 0, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = const,$$

т.е. поверхность проводника является эквипотенциальной.

4. Т.к. линии вектора \vec{E} перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям, линии \vec{E} перпендикулярны поверхности проводника.

5. Согласно теореме Гаусса $\Phi_E = \oint E_n dS = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}$.

Если S - поверхность заряженного проводника, то внутри нее $E=0$,

$$\Phi_E = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \sum q_i = 0,$$

т.е. заряды располагаются на поверхности проводника.

6. Выясним, как связана поверхностная плотность заряда с кривизной поверхности.

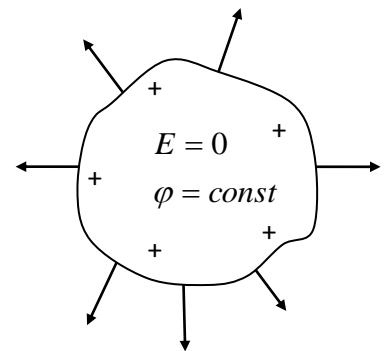


Рис. 1

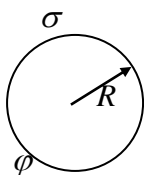


Рис. 2

Для заряженной сферы (рис. 2)

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma \cdot S}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \Rightarrow \sigma R = \epsilon_0 \varphi,$$

$$\epsilon_0 \varphi = const, \sigma R = const, \sigma \sim \frac{1}{R}.$$

Плотность зарядов определяется кривизной поверхности проводника: растет с увеличением положительной кривизны (выпуклости) (рис.3) и убывает с увеличением отрицательной кривизны (вогнутости). Особенно велика σ на острие. При этом имеющиеся в воздухе в небольшом количестве ионы обоих знаков и электроны разгоняются вблизи острия сильным полем и ударяясь об атомы газа, ионизируют их. Создается область пространственного заряда, откуда ионы того же знака, что и острие, выталкиваются полем, увлекая за собой атомы газа. Поток атомов и ионов, направленный от острия, создает впечатление «стекания зарядов». При этом острие разрезается попадающими на него ионами противоположного знака. Возникающее при этом осязаемое движение газа у острия называют «электрическим ветром».

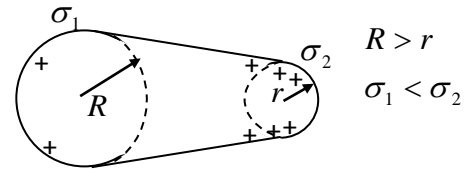


Рис. 3

Проводник во внешнем электрическом поле (рис. 4).

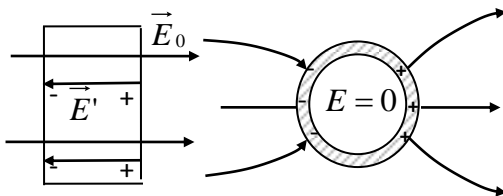


Рис. 4

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}', \quad |\vec{E}_0| = |\vec{E}'|, \quad E = E_0 - E' = 0.$$

При внесении незаряженного проводника в электрическое поле его электроны (свободные заряды) приходят в движение, на поверхности проводника появляются индуцированные заряды, поле внутри

проводника равно нулю (рис. 4). Это используют для электростатической защиты, т.е. экранировки электро- и радиоприборов (и человека) от влияния электростатических полей. Прибор окружают проводящим экраном (сплошным или в виде сетки) (рис. 5). Внешнее поле компенсируется внутри экрана полем возникающих на его поверхности индуцированных зарядов.

Рис. 5

16.2 Электроемкость уединенного проводника.

Электроемкость шара.

Если заряд на проводнике увеличить в несколько раз, потенциал в каждой точке поля, окружающего проводник, возрастет:

$$\varphi \sim q, \quad \varphi = \frac{1}{C} \cdot q, \quad C = \frac{q}{\varphi}, \quad [C] = \frac{\text{Кл}}{\text{В}} = \text{Ф}.$$

Электроемкость проводника численно равна заряду, который нужно сообщить проводнику для изменения его потенциала на единицу.

1 Ф - емкость проводника, которому нужно сообщить заряд 1 Кл для изменения потенциала на 1 В.

Емкость проводника не зависит от металла, из которого он изготовлен.

Емкость зависит от размеров и формы проводника, окружающей среды и наличия вблизи других проводников. В диэлектрике емкость увеличивается в ϵ раз.

Вычислим емкость шара радиусом R :

$$C = \frac{q}{\varphi}, \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad C = \frac{q \cdot 4\pi\epsilon_0 R}{q} = 4\pi\epsilon_0 R.$$

16.3 Конденсаторы и их емкость. Последовательное и параллельное соединение конденсаторов.

Емкость уединенных проводников невелика, но она резко возрастает при наличии рядом других проводников, т.к. потенциал уменьшается за счет противоположно направленного поля индуцированных зарядов.

Если к проводнику с зарядом q , потенциалом φ_1 и емкостью C_1 (рис. 6, а) поднести незаряженный проводник (рис. 6, б), то на поверхности второго проводника появятся индуцированные заряды (за счет смещения его свободных зарядов в поле первого проводника). Эти индуцированные заряды создадут на поверхности проводника 1 свой потенциал φ_2 , при этом $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Поскольку заряд q не изменяется, а потенциал уменьшается, емкость проводника 1 увеличивается.

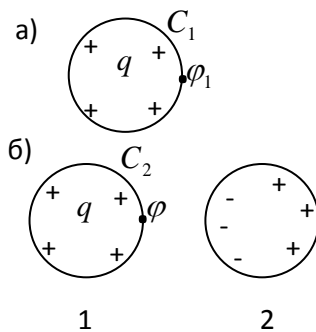


Рис. 6

$$C_1 = \frac{q}{\varphi_1},$$

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2, \quad q = \text{const}, \quad C_2 = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2},$$

$$C_2 > C_1.$$

Это обстоятельство позволило создать устройства - конденсаторы, которые способны при небольших относительно окружающих тел потенциалах накапливать на себе («конденсировать») заметные по

величине заряды.

Конденсатор - система из двух проводников, разделенных диэлектриком, расположенных на небольшом расстоянии друг от друга.

Поле сосредоточено в пространстве между проводниками, которые называются обкладками конденсатора.

Конденсаторы различаются:

1. По форме: плоские, цилиндрические, сферические и т.д.;
2. По роду диэлектрика между обкладками: воздушные, бумажные, слюдяные, керамические;
3. По виду емкости: постоянной (рис. 7, а) и переменной (рис. 7, б) емкости.

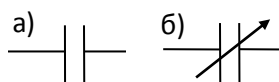


Рис. 7

Емкость конденсатора численно равна заряду, который нужно сообщить одной из обкладок, чтобы разность потенциалов между ними изменить на единицу.

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}.$$

Она зависит от размеров и формы обкладок, расстояния и диэлектрика между ними и не зависит от их материала.

Емкость плоского конденсатора:

Физика

$$C = \frac{q}{U}, \quad q = \sigma S, \quad U = E \cdot d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d, \quad C = \frac{\sigma \cdot S \varepsilon_0}{\sigma \cdot d} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}, \quad \text{где } S - \text{площадь}$$

обкладок, d - расстояние между ними.

Емкость реального конденсатора определяется этой формулой тем точнее, чем меньше d по сравнению с линейными размерами обкладок.

Параллельное соединение конденсаторов (рис. 8).

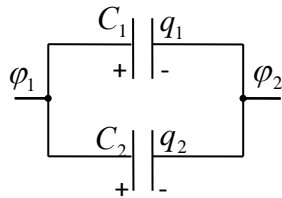


Рис. 8

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U = \text{const},$$

$$C = \frac{q}{U} \Rightarrow q = CU,$$

$$q_{\text{об}} = q_1 + q_2 - \text{по закону сохранения заряда,}$$

$$C_{\text{об}} \cdot U = C_1 U + C_2 U, \Rightarrow C_{\text{об}} = C_1 + C_2, \quad C_{\text{об}} = \sum C_i.$$

$$\text{Если } C_1 = C_2 = \dots = C, \quad C_{\text{об}} = CN.$$

Последовательное соединение конденсаторов (рис. 9).

$$q = \text{const}$$

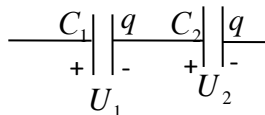


Рис. 9

$$C = \frac{q}{U} \Rightarrow U = \frac{q}{C},$$

$$U_{\text{об}} = U_1 + U_2,$$

$$\frac{q}{C_{\text{об}}} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2}, \quad \frac{1}{C_{\text{об}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}, \quad \frac{1}{C_{\text{об}}} = \sum \frac{1}{C_i}.$$

$$\text{Если } C_1 = C_2 = \dots = C, \quad C_{\text{об}} = \frac{C}{N}.$$

16.4 Энергия электростатического поля.

А. Энергия заряженного проводника.

Если имеется заряженный проводник, то его заряд фактически «слеппен» из одноименных элементарных зарядов, т.е. заряженный проводник обладает положительной потенциальной энергией взаимодействия этих элементарных зарядов. При сообщении этому проводнику одноименного с ним заряда dq (рис. 10), будет совершена отрицательная работа dA , на величину которой возрастет потенциальная энергия проводника:

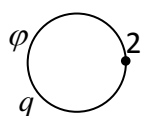


Рис. 10

$$dA = dq(\varphi_1 - \varphi_2) = dq(0 - \varphi_2) = -dq \cdot \varphi_2 = -dq \cdot \varphi,$$

$$\text{где } \varphi - \text{потенциал на поверхности проводника.}$$

$$dW = -dA = dq\varphi.$$

При сообщении незаряженному проводнику заряда q его потенциальная энергия станет равной

$$W = \int_0^q \varphi dq = \int_0^q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \int_0^q q dq = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q\varphi}{2},$$

$$\text{т.к. } C = \frac{q}{\varphi} \rightarrow \varphi = \frac{q}{C}, \quad q = C\varphi.$$

Б. Энергия заряженного конденсатора.

Полная энергия заряженного конденсатора равна той работе, которую надо совершить для его зарядки. Будем заряжать конденсатор, перенося заряженные частицы с одной пластины на другую. Пусть в результате такого переноса к какому-то моменту времени пластины приобрели заряд q , а разность потенциалов между ними стала равной

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U, \quad C = \frac{q}{U} \rightarrow U = \frac{q}{C}.$$

Для переноса очередной порции заряда dq необходимо совершить работу

$$dA = dq(\varphi_1 - \varphi_2) = dq \cdot U = dq \cdot \frac{q}{C}.$$

Следовательно, полная энергия, затраченная на зарядку конденсатора от 0 до q

$$A = \frac{1}{C} \int_0^q q dq = \frac{q^2}{2C}.$$

Вся эта работа пошла на увеличение потенциальной энергии:

$$W_n = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2}. \quad (1)$$

Объемная плотность энергии электростатического поля.

Выразим энергию электрического поля плоского конденсатора через величины, характеризующие электрическое поле:

$$W = \frac{CU^2}{2}; \quad C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}; \quad E = \frac{U}{d} \rightarrow U = E \cdot d,$$

$$W = \frac{\varepsilon_0 E^2 d^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0 E^2 Sd}{2} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot V, \quad (2)$$

где $V = Sd$ - объем, занимаемый полем.

Полученное выражение (2) справедливо для конденсаторов любой формы. Формула (1) связывает энергию конденсатора с зарядом на его обкладках, формула (2) - с напряженностью поля. Где же локализована энергия, что является носителем энергии - заряды или поле? Ответ вытекает из существования электромагнитных волн, распространяющихся в пространстве от передатчика к приемнику и переносящих энергию. Возможность такого переноса свидетельствует о том, что энергия локализована в поле и переносится вместе с ним. В пределах электростатики бессмысленно разделять энергию заряда и поля, поскольку постоянные во времени поля и обуславливающие их заряды не могут существовать обособленно друг от друга.

Если поле однородно (плоский конденсатор), заключенная в нем энергия распределяется в пространстве с постоянной плотностью.

Физика

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E \cdot E}{2} = \frac{D \cdot E}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} - \text{объемная плотность энергии.}$$

Лекция 17. Постоянный электрический ток.

17.1 Сила и плотность тока.

Электродвижущая сила и напряжение.

Электродинамика - основной раздел учения об электричестве, в котором рассматриваются явления и процессы, связанные с движением электрических зарядов или макроскопических заряженных тел.

Важнейшим понятием электродинамики является понятие электрического тока.

Электрическим током называется упорядоченное движение электрических зарядов.

Ток может течь в газах, жидкостях и твердых телах.

Для возникновения и существования тока необходимо выполнение 2-х условий:

1. Наличие в данной среде свободных носителей тока, способных перемещаться в пределах всей среды (носителями тока являются: в металлах и полупроводниках – электроны; в электролитах - ионы обоих знаков; в газах - ионы обоих знаков и электроны);

2. Существование в данной среде электрического поля.

За направление тока условно принимают направление движения положительных зарядов.

В отсутствие электрического поля все носители тока совершают хаотическое тепловое движение, скорость которого зависит от массы частиц и температуры, при $t^0 \approx 20^0 C$ $v_{ионов} \sim 10^2 - 10^3$, $v_{эл-нов} \sim 10^5 - 10^6$ м/с.

Электрическое поле сообщает носителям тока дополнительную скорость упорядоченного движения $\langle v \rangle \sim 10^{-4} - 10^{-5}$ м/с. При включении поля на хаотическое движение накладывается упорядоченное движение со скоростью $\langle v \rangle$. Так, в металлах, электроны проводимости, не прекращая своего хаотического движения, медленно «сносятся» полем вдоль проводника со скоростью $\langle v \rangle$, т.е. довольно медленно. Однако эта скорость $\langle v \rangle$ не имеет никакого отношения к скорости распространения тока вдоль проводника. При замыкании электрической цепи возникает направленный сдвиг электронов, который вызывает электромагнитную волну, распространяющуюся вдоль всей цепи. Скорость этой волны и является скоростью распространения тока вдоль проводника.

Количественной характеристикой тока является сила тока - скалярная физическая величина, равная отношению заряда dq , проходящего через поперечное сечение проводника за малый промежуток времени dt , к величине этого промежутка:

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Физика

Весь заряд, прошедший за время t через поперечное сечение проводника, можно определить, взяв интеграл:

$$q = \int_0^t Idt.$$

Ток, сила и направление которого не изменяются со временем, называется постоянным. Для постоянного тока

$$I = \frac{q}{t},$$

т.е. сила постоянного тока численно равна заряду, проходящему через поперечное сечение проводника за единицу времени. В этом случае:

$$q = It, \quad [I] = 1\text{A}.$$

1А - сила постоянного тока, текущего по двум бесконечно длинным параллельным проводникам, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м друг от друга и взаимодействующим с силой $2 \cdot 10^{-7}\text{Н}$ на каждый метр их длины. Взаимодействие проводников обусловлено магнитными полями, порождаемыми этими токами.

Электрический ток может быть распределен по поперечному сечению проводника неравномерно. Распределение тока определяется плотностью тока:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}, \quad [j] = 1 \frac{\text{А}}{\text{м}^2}.$$

Плотность тока численно равна отношению силы тока dI сквозь малый элемент поверхности, нормальный (т.е. перпендикулярный) к направлению движения зарядов, к величине dS_{\perp} площади этого элемента.

Вектор \vec{j} сонаправлен с вектором средней скорости $\langle v \rangle$ упорядоченного движения положительных носителей.

Зная \vec{j} в каждой точке проводника, можно найти I через любое поперечное сечение проводника:

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S}_{\perp}.$$

Для постоянного тока

$$j = \frac{I}{S_{\perp}},$$

т.е. плотность постоянного тока численно равна силе тока, проходящего через единицу площади поперечного сечения проводника, перпендикулярного направлению тока.

$$I = jS_{\perp}.$$

Выразим силу и плотность постоянного тока через среднюю скорость упорядоченного движения зарядов.

Согласно определению

$$I = \frac{q}{t}, \tag{1}$$

$$q = eN, \tag{2}$$

Физика

где $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ – элементарный электрический заряд,

N – число свободных электронов, прошедших за время t через поперечное сечение проводника.

Для определения N рассмотрим проводник цилиндрической формы с площадью поперечного сечения S (рис. 1) и выделим на нем участок длиной $l = \langle v \rangle t$, т.е. l – это путь, который проходят электроны за время t , двигаясь под

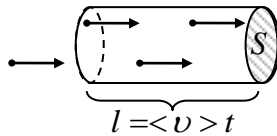


Рис. 1

действием электрического поля с $\langle v \rangle$. Как видно из рисунка, те электроны, которые в данный момент находятся на левом основании цилиндра, через t дойдут до правого основания. Следовательно, за время t через правое основание пройдут все свободные электроны, содержащиеся внутри рассматриваемого

цилиндра, т.е.

$$N = nV = n \cdot l \cdot S = n \langle v \rangle t S, \quad (3)$$

где $n = \frac{N}{V}$ – концентрация электронов,

$V = l \cdot S$ – объем цилиндра.

Подставим (3) → в (2) → в (1):

$$I = \frac{l \cdot n \langle v \rangle t S}{t} = l \cdot n \langle v \rangle S,$$

$$j = \frac{I}{S} = en \langle v \rangle, \quad \vec{j} = en \langle \vec{v} \rangle.$$

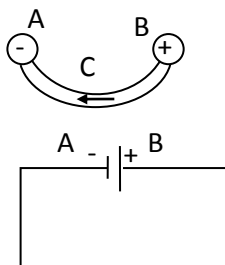


Рис. 2

Если два разноименно заряженных до потенциалов ϕ_1 и ϕ_2 проводника A и B соединить проводником C, то под действием электрического поля электроны будут перемещаться в направлении ACB (т.е. в направлении BCA пойдет ток I) до тех пор, пока потенциалы точек A и B не станут одинаковыми, после чего ток прекратится (рис. 2).

Очевидно, что для поддержания в цепи постоянного тока необходимо, чтобы потенциалы ϕ_1 и ϕ_2 не менялись со временем, несмотря на то, что каждую секунду определенное число электронов уходит из точки A и приходит в точку B. Для этого необходимо иметь специальное устройство – источник тока, внутри которого происходило бы непрерывное разделение разноименных зарядов и перенос отрицательных зарядов к проводнику A, положительных – к проводнику B. Проводники A и B при этом называются полюсами источника тока.

Источник тока – устройство, внутри которого происходит непрерывное разделение разноименных зарядов и перенос их к соответствующим полюсам источника.

Очевидно, что разъединение разноименных зарядов происходит под действием сил неэлектростатического происхождения (т.к. электростатические силы приводят к соединению разноименных зарядов). Эти силы называют сторонними силами.

Физика

Сторонние силы - это силы неэлектростатического происхождения, действующие на заряды внутри источников тока и поддерживающие разность потенциалов между полюсами.

Природа сторонних сил в различных источниках тока различна: в гальванических элементах эти силы возникают за счет энергии химической реакции между электродами и электролитом; в электрических генераторах работа сторонних сил совершается за счет механической энергии, затрачиваемой на вращение ротора генератора и т.д.

Сторонние силы, перемещая электрические заряды, совершают работу.

Физическая величина, равная работе сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда, называется э.д.с., действующей в цепи или на ее участке:

$$\varepsilon = \frac{A_{cm}}{q}; \quad [\varepsilon] = 1 \frac{Дж}{Кл} = 1В.$$

Эта работа производится за счет энергии, затрачиваемой в источнике тока, поэтому величину ε называют э.д.с. источника тока.

Э.д.с. - скалярная величина. Если в некоторой цепи действуют несколько э.д.с., то они могут быть положительными и отрицательными, т.е. э.д.с. - алгебраическая величина.

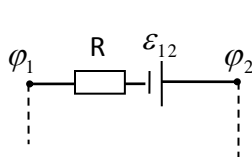


Рис. 3

Рассмотрим некоторый участок цепи (рис. 3), содержащий э.д.с. ε_{12} ; R - сопротивление участка, φ_1 и φ_2 - разность потенциалов между его концами.

Работа по перемещению заряда q на этом участке совершается как кулоновскими, так и сторонними силами:

$$A_{12} = A_k + A_{cm}.$$

Как известно из электростатики, работа кулоновских сил при перемещении заряда из точки с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_2 определяется выражением $A_k = q(\varphi_1 - \varphi_2)$.

$$\text{Т.к. } \varepsilon_{12} = \frac{A_{cm}}{q} \Rightarrow A_{cm} = q\varepsilon_{12}, \text{ т.е. } A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\varepsilon_{12}.$$

Физическая величина, равная работе, совершаемой электростатическими и сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда по некоторому участку цепи, называется напряжением на данном участке цепи:

$$U_{12} = \frac{A_{12}}{q}.$$

Участок цепи, на котором действуют сторонние силы, т.е. содержащий э.д.с., называется **неоднородным**.

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12} - \text{напряжение на неоднородном участке цепи.}$$

Участок цепи, на котором не действуют сторонние силы, т.е. не содержащий э.д.с., называется **однородным**.

$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$; напряжение на однородном участке цепи равно разности потенциалов между его концами.

17.2 Закон Ома. Сопротивление проводников. Последовательное и параллельное соединение проводников.

Закон Ома для однородного участка цепи.

В 1826 году немецкий ученый Георг Ом экспериментально установил, что сила тока I , текущего по однородному участку цепи (металлическому проводнику) прямо пропорциональна напряжению на этом участке:

$$I = \frac{U}{R}.$$

Коэффициент пропорциональности обозначается $\frac{1}{R}$, а величина R называется электрическим сопротивлением проводника.

Сила тока на однородном участке цепи прямо пропорциональна напряжению на этом участке и обратно пропорциональна его сопротивлению.

Поскольку обе части уравнения относятся ко всему участку проводника, это соотношение называют законом Ома в интегральной форме. Закон Ома позволяет установить единицу электрического сопротивления:

$$R = \frac{U}{I}, \quad [R] = 1 \frac{В}{А} = 1 \text{ Ом}.$$

1 Ом - сопротивление такого проводника, в котором при напряжении 1 В течет постоянный ток силой 1А. Величина сопротивления зависит от размеров и формы проводника, материала, из которого он изготовлен, и температуры. Для однородного цилиндрического проводника

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

где ρ - удельное сопротивление вещества.

$$\rho = \frac{RS}{l}, \quad [\rho] = \frac{\text{Ом} \cdot \text{м}^2}{\text{м}} = \text{Ом} \cdot \text{м}.$$

Удельное сопротивление численно равно сопротивлению проводника единичной длины с площадью поперечного сечения, равной единице, изготовленного из данного вещества.

Электрическое сопротивление характеризует способность данного проводника противодействовать упорядоченному движению электрических зарядов.

Современная квантовая теория объясняет это следующим образом. Свободные электроны металлов обладают волновыми свойствами и ведут себя внутри кристаллической решетки подобно волнам. Если кристалл абсолютно лишен искажений и все ионы неподвижны в узлах решетки, то электронная волна, формируясь в этой решетке, «приспосабливается» к ней и проходит через решетку, как бы «не замечая» ее, как через пустое пространство. Зато любые нарушения периодичности решетки - дефекты, примеси, тепловые колебания ионов - являются причиной рассеяния электронных волн, т.е. изменения направления их распространения. Это рассеяние уменьшает упорядоченность движения электронов, т.е. вызывает электрическое сопротивление.

Физика

Опыт показывает, что в первом приближении R и ρ металлов $\sim t^0$.

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t^0), \quad R = R_0(1 + \alpha t^0),$$

где $\alpha = \frac{1}{273} \text{град}^{-1}$ – температурный коэффициент сопротивления для большинства металлов. Следовательно,

$$\rho = \rho_0 \alpha T, \quad R = R_0 \alpha T.$$

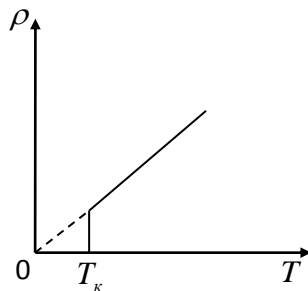


Рис. 4

В 1911 г. голландский ученый Камерлинг-Оннес обнаружил, что при $T_k = 4,15 \text{ K}$ сопротивление ртути скачком падает до нуля. **Сверхпроводимость** – это явление, при котором сопротивление ряда металлов и сплавов скачком падает до нуля при температуре, близкой к абсолютному нулю.

У каждого сверхпроводника имеется своя критическая температура T_k , при которой он переходит в сверхпроводящее состояние (рис. 4).

Явление сверхпроводимости находит ряд применений в науке и технике, в частности, для создания очень сильных магнитных полей.

Зависимость $R(t)$ металла используется в термометрах сопротивления, представляющих собой металлическую проволоку (чаще всего платиновую), намотанную на слюдяной или фарфоровый каркас. Такой термометр позволяет измерить с точностью до $0,003 \text{ K}$ как сверхнизкие, так и сверхвысокие температуры.

Последовательное соединение проводников (рис. 5):

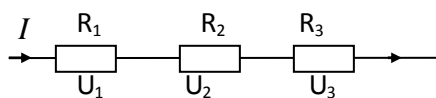


Рис. 5

$$I = \text{const},$$

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n,$$

$$IR = IR_1 + \dots + IR_n,$$

$$R = R_1 + \dots + R_n.$$

$$\text{Если } R_1 = R_2 = \dots = R_n = R, \text{ то } R_{\text{о6}} = nR.$$

Параллельное соединение проводников (рис. 6):

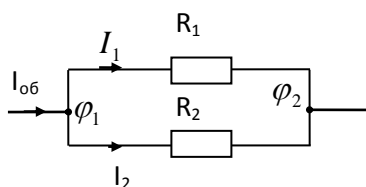


Рис. 6

$$U = \text{const},$$

$$q_{\text{о6}} = q_1 + q_2 + \dots + q_n,$$

$$\frac{q_{\text{о6}}}{t} = \frac{q_1}{t} + \dots + \frac{q_n}{t},$$

$$I_{\text{о6}} = I_1 + \dots + I_n,$$

$$\frac{U}{R_{\text{о6}}} = \frac{U}{R_1} + \dots + \frac{U}{R_n},$$

$$\frac{1}{R_{\text{о6}}} = \frac{1}{R_1} + \dots + \frac{1}{R_n}.$$

$$\frac{1}{R_{\text{о6}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad \frac{1}{R_{\text{о6}}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}, \quad R_{\text{о6}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Физика

Если $R_1 = R_2 = \dots = R_n = R$, то $\frac{1}{R_{об}} = \frac{n}{R} \Rightarrow R_{об} = \frac{R}{n}$.

Закон Ома можно представить и в другой форме, называемой дифференциальной, т.е. относящейся к какой-то одной точке внутри проводника (а не ко всему проводнику).

Поскольку электрическое поле внутри цилиндрического проводника однородно,

$$E = \frac{U}{l}, \quad U = El,$$

а сила тока связана с его плотностью, $I = jS$,

выражение $I = \frac{U}{R}$ можно представить в виде:

$$jS = \frac{El}{\rho \frac{l}{S}}, \quad j = \frac{1}{\rho} E.$$

$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}$ - закон Ома в дифференциальной форме:

плотность тока в любой точке проводника прямо пропорциональна напряженности электрического поля \vec{E} в данной точке.

Закон Ома для неоднородного участка цепи.

Т.к. для неоднородного участка

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12},$$

$$I = \frac{U_{12}}{R_{12}} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}}{R_{12}},$$

где R_{12} - общее сопротивление участка, включая внутреннее сопротивление э.д.с.

Если цепь замкнута (рис.7), $\varphi_1 = \varphi_2$, $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, $R_{12} = R + r$,

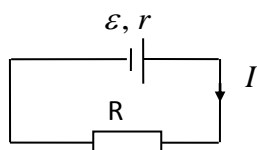


Рис. 7

$I = \frac{\varepsilon}{R + r}$ - закон Ома для замкнутой цепи:

сила тока в замкнутой цепи прямо пропорциональна э.д.с. источника тока и обратно пропорциональна сумме сопротивлений внутреннего и внешнего участков цепи.

Цепь содержит n одинаковых источников тока, соединенных последовательно (рис. 8а) и параллельно (рис. 8б).

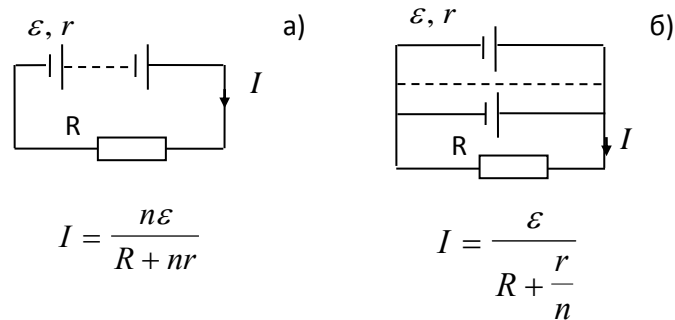


Рис. 8

17.3 Работа и мощность тока. Закон Джоуля-Ленца.

В электрической цепи энергия источника превращается в энергию электрического тока, при этом в потребителях электрической энергии ток производит определенную работу. Зная напряжение на данном участке цепи и силу тока, можно определить эту работу.

Из электростатики известно, что работа при перемещении заряда между точками с потенциалами φ_1 и φ_2 определяется формулой $A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$.

Для однородного участка цепи $\varphi_1 - \varphi_2 = U$, $q = It$, $A = IUt$.

Т.к. $I = \frac{U}{R}$, $U = IR$, $A = \frac{U^2}{R}t = I^2Rt$.

Для замкнутой цепи, содержащей э.д.с., $A = I\varepsilon t$.

Мощность тока определяется работой, совершенной за единицу времени:

$$P = \frac{A}{t} = IU = \frac{U^2}{R} = I^2R.$$

Если ток проходит по неподвижному проводнику и химических превращений в нем не совершается, то вся работа тока идет на нагревание проводника, т.е. количество теплоты Q , выделяемое в проводнике, равно:

$$Q = IUt = \frac{U^2}{R}t = I^2Rt, \quad Q = I^2Rt \text{ – закон Джоуля-Ленца.}$$

Последнее соотношение было установлено экспериментально независимо друг от друга Дж. Джоулем и Э.Х. Ленцем: количество теплоты, выделяемое в проводнике при прохождении по нему постоянного тока, прямо пропорционально квадрату силы тока, сопротивлению проводника и времени его прохождения.

17.4 Правила Кирхгофа для разветвленных цепей.

Законы Ома дают возможность рассчитать практически любую сложную цепь, однако непосредственный расчет разветвленных цепей сложен и гораздо проще осуществляется с помощью 2-х правил Кирхгофа.

Представим разветвленную цепь постоянного тока, обозначим все ее элементы и произвольным образом зададим предполагаемые направления токов. Первое правило Кирхгофа относится к узлам цепи.

Физика

Узлом разветвленной цепи называется точка, в которой соединяются более двух проводников. Участок цепи от узла до следующего узла называется **ветвью**.

Поскольку в случае постоянного тока нигде в цепи не должны накапливаться заряды (иначе токи не оставались бы постоянными), сумма токов, текущих к узлу, должна быть равна сумме токов, текущих от узла (в соответствии с законом сохранения заряда).

Ток, текущий к узлу, договорились считать условно положительным, от узла - отрицательным.

Первое правило Кирхгофа: алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю, $\sum I_i = 0$.

Можно записать $N - 1$ независимых уравнений для N узлов цепи.

Второе правило относится к любому замкнутому контуру, выделенному в разветвленной цепи.

Выберем произвольное направление обхода контура. Все токи, направление которых совпадает с направлением обхода, считаются положительными, направленные противоположно - отрицательными. Э.д.с. считается положительной, если при выбранном направлении обхода внутри источника тока переход совершается от «минуса» к «плюсу», т.е. в сторону повышения потенциала.

Второе правило Кирхгофа: в любом замкнутом контуре, выделенном в разветвленной цепи алгебраическая сумма произведений сил токов на сопротивления соответствующих участков этого контура равна алгебраической сумме э.д.с., $\sum I_i R_i = \sum \mathcal{E}_i$.

При расчете цепи с использованием правил Кирхгофа необходимо помнить следующее.

1. Число уравнений равно числу искомых величин.
2. Для N узлов записывается $N-1$ уравнений, а остальные - в соответствии со вторым правилом.
3. Токи, текущие к узлу, положительны, от узла - отрицательны.
4. Целесообразно направление обхода выбирать так, чтобы большинство токов были положительны, т.е. совпадали по направлению с обходом контура.
5. В одной ветви от узла до узла течет один ток.
6. Обход лучше начинать с узла и вернуться к этому же узлу.
7. Контур выбирается таким образом, чтобы каждый новый контур содержал хотя бы один участок цепи, не входивший в уже рассмотренные контуры.