МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ДГТУ)

Кафедра «Физика»

ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Механика

Методическое пособие

Ростов-на-Дону

2020

УДК 530.1

Составители: Т.С.Беликова,

Т.В.Шкиль

Методическое пособие «Задачи по физике и методы их решения. Механика»; Донской гос. тех. ун-т. – Ростов-на-Дону: ДГТУ, 2020. – 103 с.

Задачник состоит из 6 частей, соответствующих темам, изучаемым в разделе «Механика». Каждая часть содержит сведения по теории, примеры решения типовых задач и перечень задач для самостоятельного решения различного уровня трудности.

Предназначен для обучающихся инженерных направлений подготовки всех форм обучения, в программу учебного курса которых входит изучение курса физики, и может быть использован для дистанционного обучения.

УДК 530.1

Печатается по решению редакц.-издат. совета Донского гос. тех. ун-та.

Ответств. за выпуск зав. кафедрой «Физика» доктор физ.-мат. наук, проф. А.В.Благин

Введение

При подготовке высококвалифицированных специалистов технических специальностей большое внимание должно уделяться фундаментальным наукам, законы которых положены в основу практически всех решений инженерной практики. К таким наукам, в первую очередь, относится физика.

Первостепенное значение имеет умение специалиста самостоятельно увидеть физическую сущность решаемых проблем и применять полученные знания для повышения эффективности работы и поиска принципиально новых решений поставленных перед ним задач.

При изучении дисциплины «Физика» решение физических задач вызывает у студентов наибольшие затруднения, поскольку для этого оказывается, как правило, недостаточно формального знания физических законов и понятий; необходимо знание специальных методов и приемов (алгоритмов) решения определенных групп задач. В некоторых случаях таких методов не удается выработать и тогда главным является понимание физической сущности явлений и законов, позволяющих решить задачу, и умение аналитически мыслить.

Настоящее методическое пособие должно помочь студентам научиться решать физические задачи, т.е. овладеть методами и способами их решения.

Материал учебного пособия состоит из 6 частей, соответствующих темам, изучаемым в разделе «Механика». В начале каждой темы даются сведения по теории и разбирается решение типовых задач; тема завершается перечнем задач для самостоятельного решения различного уровня трудности. В основном они заимствованы из ряда существующих задачников (см. список использованной литературы); часть задач была переработана, имеются также оригинальные задачи, принадлежащие авторам этого учебника.

Все задачи снабжены ответами. Для сложных задач ответ приведен в общем виде с указанием численного значения искомой величины.

Наличие в задачнике необходимого теоретического материала, примеров решения задач и достаточного количества задач, которые могут быть решены студентами самостоятельно на основе разобранных, позволяют использовать учебное пособие на практических занятиях, для самостоятельной работы студентов и при дистанционном обучении.

Предлагаемое методическое пособие предназначено для студентов ДГТУ всех направлений подготовки, ОПОП которых предполагает изучение дисциплины «Физика».

1. ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ

Средняя скорость перемещения – величина, равная отношению перемещения ко времени, за которое совершено перемещение:

$$\langle \vec{\upsilon} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Единица измерения скорости $[\upsilon] = 1\,{}^{м}\!/\!_{с}$.

Мгновенная скорость – векторная величина, равная первой производной радиуса-вектора движущейся точки по времени:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Модуль вектора мгновенной скорости равен первой производной от пути по времени:

$$\upsilon = \frac{dS}{dt}.$$

Среднее ускорение:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t}, \quad [a] = 1\,{}^{м}\!/\!_{с^2}.$$

Мгновенное ускорение – векторная величина, равная первой производной скорости по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt},$$

Модуль ускорения:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt}.$$

Равномерное прямолинейное движение:

$$a = 0, \quad \vec{\upsilon} = const, \quad \upsilon = \frac{S}{t}, \quad S = \upsilon \cdot t.$$

Равнопеременное прямолинейное движение:

$\vec{a} = const$, $a > 0$ – равноускоренное, $a < 0$ – равнозамедленное;

$$a = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t}, \quad \upsilon = \upsilon_0 + a \cdot t, \quad S = \upsilon_0 \cdot t + \frac{at^2}{2}, \quad \upsilon^2 - \upsilon_0^2 = 2aS, \quad S = \langle \upsilon \rangle \cdot t.$$

Переменное прямолинейное движение:

$$\upsilon = \int_0^t a\,dt + \upsilon_0\,, \qquad S = \int_0^t \upsilon dt\,.$$

Полное ускорение материальной точки при криволинейном движении (рис.1):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n\,,$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}\,.$$

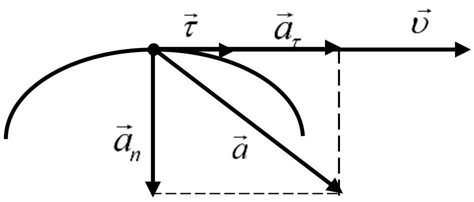


Рис. 1

Тангенциальное ускорение

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau}\,.$$

Модуль тангенциального ускорения

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}\,.$$

Нормальное ускорение

$$\vec{a}_n = \upsilon\frac{d\vec{\tau}}{dt}\,.$$

Модуль нормального ускорения

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}\,,$$

где R – радиус кривизны траектории.

Угловая скорость

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}\,, \qquad \omega = \frac{d\varphi}{dt}\,, \qquad [\omega] = 1\,{}^{рад}/_{с}\,.$$

Угловое ускорение

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\,, \qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt}\,, \qquad [\varepsilon] = 1\,{}^{рад}/_{с^2}\,.$$

При ускоренном движении вектор $\vec{\varepsilon}$ сонаправлен с $\vec{\omega}$, при замедленном – противоположно вектору $\vec{\omega}$.

Равномерное вращательное движение ($\vec{\varepsilon} = 0$)

$$\vec{\omega} = const\,, \qquad \omega = \frac{\varphi}{t}\,, \qquad \varphi = \omega \cdot t\,.$$

Равнопеременное вращательное движение ($\vec{\varepsilon} = const$, если $\varepsilon > 0$ – движение равноускоренное, $\varepsilon < 0$ – движение равнозамедленное).

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t}, \quad \omega = \omega_o + \varepsilon t, \quad \varphi = \omega_o t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad \omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi.$$

Переменное вращение тела

$$\omega = \omega_o + \int_{t1}^{t2} \varepsilon\, dt, \qquad \varphi = \int_{t1}^{t2} \omega dt .$$

Связь между кинематическими характеристиками:

$$\upsilon = \omega \cdot R, \quad a_\tau = R \cdot \varepsilon, \quad a_n = \omega^2 \cdot R.$$

Если вращение равномерное, его можно характеризовать периодом и частотой.

Частота – это число оборотов в единицу времени:

$$\nu = \frac{N}{t}.$$

Период – это время, за которое тело совершает один полный оборот:

$$T = \frac{t}{N} = \frac{1}{\nu}.$$

Угловая скорость при равномерном вращательном движении

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Если вращение переменное, то

$$\nu = \frac{dN}{dt}.$$

Следовательно, полное число оборотов N можно найти интегрированием:

$$N = \int \nu dt.$$

Примеры решения задач

Задача 1. Две материальные точки движутся согласно уравнениям $S_1 = A + Bt + 3Ct^2, м$ и $S_2 = 6Dt + Et^3, м$, где $A = 2 м$, $B = -3 м/с$, $C = 1 м/с^2$, $D = 1 м/с$, $E = 1 м/с^3$. В какой момент времени ускорения этих точек будут одинаковыми? Найти скорости точек в этот момент времени.

Дано

$S_1 = A + Bt + 3Ct^2, м$

$S_2 = 6Dt + Et^3, м$

$A = 2 м$

$B = -3 м/с$

$C = 1 м/с^2$

$D = 1 м/с$

$E = 1 м/с^3$

$a_1 = a_2$

$t - ?$

$\upsilon_1 - ?$

Решение

Сначала найдем скорости обеих точек, а затем их ускорения:

$$\upsilon_1 = \frac{dS_1}{dt} = B + 6Ct, \qquad \upsilon_2 = \frac{dS_2}{dt} = 6D + 3Et^2,$$

$$a_1 = \frac{d\upsilon_1}{dt} = 6C, \quad (1) \qquad a_2 = \frac{d\upsilon_2}{dt} = 6Et. \quad (2)$$

По условию задачи $a_1 = a_2$, поэтому, приравняв друг другу правые части уравнений (1) и (2), найдем тот момент времени *t*, когда ускорения точек станут одинаковыми:

$$6C = 6Et, \; t = \frac{C}{E} = 1с.$$

Подставив значение времени $t = 1 с$ в формулы скоростей, найдем мгновенные значения скоростей υ_1 и υ_2 в этот момент времени:

$$\upsilon_1 = -3 + 6 \cdot 1 \cdot 1 = 3 \; м/с;$$

$$\upsilon_2 = 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1^2 = 9 \; м/с.$$

Задача 2. Координаты материальной точки изменяются с течением времени по закону $x = A\sin\pi t, м$ и $y = B(1 + \cos\pi t), м$, где *A* и *B* – постоянные величины.

Найти модуль скорости и ускорения этой точки для момента времени $t = 0,5\,c$

.

Дано

$x = A\sin \pi t,\ м$

$y = B(1+\cos \pi t),\ м$

$t = 0,5\,c$

$|\upsilon| - ?$

$|a| - ?$

Решение

Вектор скорости материальной точки $\vec{\upsilon}$ можно разложить на две составляющие $\vec{\upsilon}_x$ и $\vec{\upsilon}_y$ (рис. 3).

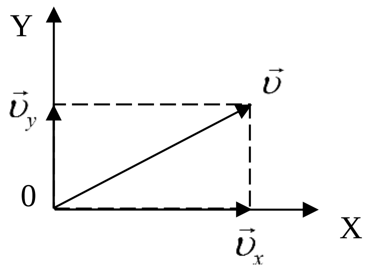


Рис. 3

По теореме Пифагора

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^{\ 2} + \upsilon_y^2}.$$

Таким образом, для решения задачи надо найти проекции скорости υ_x и υ_y:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \pi A cos \pi t,$$

$$\upsilon_y = \frac{dy}{dt} = -\pi B \sin \pi t.$$

Тогда

$$\upsilon = \sqrt{\left(\pi A \cos \pi t\right)^2 + (-\pi B \sin \pi t)^2} = \pi\sqrt{\left(A\cos \pi t\right)^2 + (B\sin \pi t)^2}.$$

Подставив значение $t = 0,5\,c$, найдем модуль скорости:

$$\upsilon = \pi\sqrt{\left(A\cos 0,5\pi\right)^2 + (B\sin 0,5\pi)^2} = \pi B,\ {}^{м}\!/_{c}$$

Аналогично,

$$a = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^2}.$$

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = -\pi^2 A\sin\pi t, \qquad a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = -\pi^2 B\cos\pi t\,,$$

$$a = \sqrt{\left(-\pi^2 A\sin\pi t\right)^2 + \left(-\pi^2 B\cos\pi t\right)^2} = \pi^2\sqrt{\left(A\sin\pi t\right)^2 + \left(B\cos\pi t\right)^2}.$$

Подставим $t = 0{,}5\,c$:

$$a = \pi^2\sqrt{\left(A\sin 0{,}5\pi\right)^2 + \left(B\cos 0{,}5\pi\right)^2} = A\pi^2\ {}^{м}\!/\!_{c^2}\,.$$

Задача 3. Спутник движется по орбите со скоростью $7{,}75\cdot 10^3\ {}^{м}\!/\!_{c}$. Найти путь, пройденный им за 5 с после включения тормозных двигателей, если тангенциальное ускорение изменяется в это время по закону $a_\tau = bt$, где $b = -2\ {}^{м}\!/\!_{c^3}$. Вычислить тангенциальное ускорение и скорость в конце этого пути.

Дано	Решение
$\upsilon_0 = 7{,}75\cdot 10^3\ м/c$ $a_\tau = bt$ $b = -2\ {}^{м}\!/\!_{c^3}$ $\tau = 5c$ $S - ?$ $\upsilon - ?$ $a_\tau - ?$	Поскольку ускорение является функцией времени, скорость и путь следует определять методом интегрирования:

$$\upsilon = \upsilon_0 + \int_0^\tau a_\tau dt\,.$$

$$\upsilon = \upsilon_0 + \int_0^\tau bt dt = \upsilon_0 + \left.\frac{bt^2}{2}\right|_0^\tau = \upsilon_0 + \frac{b\tau^2}{2}.$$

Произведем вычисления:

$$\upsilon = \left(7{,}75\cdot 10^3 - \frac{2\cdot 25}{2}\right)\frac{м}{c} = 7725\frac{м}{c}\,.$$

Путь, пройденный телом за время τ,

$$S = \int_0^\tau \upsilon dt,$$

подставим в последнее выражение $\upsilon = \upsilon_0 + \frac{bt^2}{2}$,

$$S = \int_0^\tau \left(\upsilon_0 + \frac{bt^2}{2} \right) dt = \int_0^\tau \upsilon_0 dt + \int_0^\tau \frac{bt^2}{2} dt = \upsilon_0 \tau + \frac{b\tau^3}{2}, \qquad S = 38708\,м.$$

Вычислим тангенциальное ускорение в конце пути

$a_\tau = -2 \cdot 5 = -10\ м/с^2$.

Задача 4. Материальная точка движется по криволинейному участку траектории с радиусом кривизны 1 м. Уравнение ее движения $S = A + Bt + Ct^3,\ м$. Найти полное ускорение материальной точки в момент времени $t = 2\ с$ и угол, который составит вектор полного ускорения с радиусом кривизны, если $B = -3\ м/с$, $C = 1\ м/с^2$.

Дано

$S = A + Bt + Ct^3,\ м$

$R = 1\,м$

$A = 2\,м$

$B = -3\ м/с$

$C = 1\ м/с^2$

$t = 2\,с$

$a - ?$

Решение

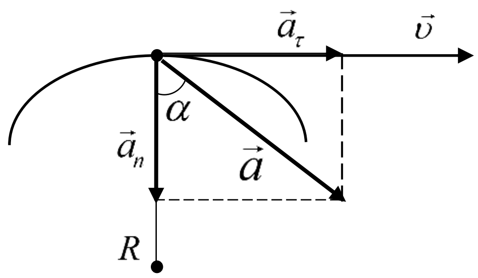


Рис. 4

Полное ускорение материальной тачки равно векторной сумме нормального и тангенциального ускорений (рис. 4):

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau.$$

В скалярной записи согласно теореме Пифагора

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$$

Тангенциальное ускорение определяется первой производной скорости материальной точки по времени; скорость материальной точки определяется как производная пути по времени:

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} = B + 3Ct^2 .$$

Тогда

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = 6Ct .$$

Нормальное ускорение определяется формулой

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{\left(B + 3Ct^2\right)^2}{R} .$$

Подставив выражения для a_n и a_τ в формулу полного ускорения точки, получим

$$a = \sqrt{\frac{\left(B + 3Ct^2\right)^4}{R^2} + \left(6Ct\right)^2} ,$$

$$a = \sqrt{\frac{\left(-3 + 3\cdot 1\cdot 2^2\right)^4}{1} + \left(6\cdot 1\cdot 2\right)^2} = 82 \, м/с^2 .$$

Из прямоугольного треугольника на рис. 4 определим тангенс угла α .

$$tg\alpha = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{6CtR}{\left(B + 3Ct^2\right)^2} ,$$

$$tg\alpha = \frac{6\cdot 1\cdot 2\cdot 1}{\left(-3 + 3\cdot 1\cdot 2^2\right)^2} = 0{,}1481 ,$$

$$\alpha = a\tau ctg(0{,}1481) = 8{,}4^0 .$$

Задача 5. Найти угловое ускорение тела, если известно, что через 1 с после начала его вращения вектор полного ускорения точки на боковой поверхности тела составил угол 60^0 с вектором линейной скорости этой точки. Найти число оборотов, которое совершило тело за это время. Вращение тела считать равноускоренным.

Дано

$\omega_0 = 0$

$\alpha = 60^0$

$t = 1 c$

$\varepsilon = const$

$\varepsilon - ?$

$N - ?$

Решение

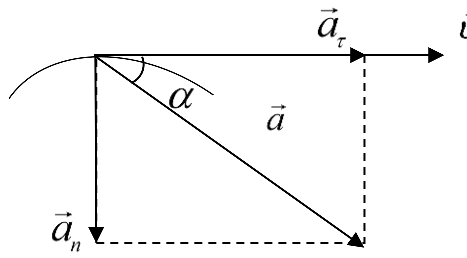


Рис. 5

Так как вращение равноускоренное, а $\omega_0 = 0$, то

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t = \varepsilon t .$$

Нормальное и тангенциальное ускорения связаны с угловой скоростью и угловым ускорением соотношениями:

$$a_n = \omega^2 R = \varepsilon^2 t^2 R, \qquad (1)$$

$$a_\tau = \varepsilon R, \qquad (2)$$

где R – радиус траектории точки.

Разделив (1) на (2), получим

$$\frac{a_n}{a_\tau} = \varepsilon t^2 .$$

Как видно из рис. 5, $tg\alpha = \frac{a_n}{a_\tau}$ следовательно

$$\varepsilon t^2 = tg\alpha, \quad \varepsilon = \frac{tg\alpha}{t^2}, \quad \varepsilon = \frac{tg 60^0}{1^2} = 1{,}732 \ {рад}/{c^2} .$$

Число оборотов N можно найти интегрированием:

$$N = \int \nu dt = \int \frac{\omega}{2\pi} dt = \int \frac{\varepsilon t}{2\pi} dt = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int t dt = \frac{\varepsilon t^2}{4\pi}, \quad N = \frac{1{,}732 \cdot 1^2}{4 \cdot 3{,}14} = 0{,}137 \ об .$$

Задача 6. Луч локатора следит за движением летательного аппарата, который перемещается по криволинейной траектории с неизменным радиусом кривизны. Зависимость угла поворота луча от времени дается уравнением

$\varphi = A + Bt - Ct^2 + Dt^3,\ рад$, где $A,\ B,\ C$ и D – постоянные величины. Найти длину луча локатора, если известно, что в момент времени t от начала слежения нормальное ускорение стало равно a_n, а летательный аппарат можно рассматривать как материальную точку.

Дано	Решение
$\varphi = A + Bt - Ct^2 + Dt^3,\ рад$ t a_n $r - ?$	$\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = B - 2Ct + 3Dt^2 = B + t(3Dt - 2C),$ $a_n = \omega^2 r,$ $r = \dfrac{a_n}{\omega^2} = \dfrac{a_n}{\left(B + t\left(3Dt - 2C\right)\right)^2}.$

Задача 7. Поезд движется по закруглению радиусом 400 м. Зависимость пройденного пути от времени дается уравнением $S = Ct^3,\ м$, где $C = 1\,{}^{м}\!/_{с^3}$. Найти тангенциальное и нормальное ускорения поезда в тот момент, когда его скорость равна 10 м/с.

Дано	Решение
$S = Ct^3,\ м$ $R = 400\ м$ $C = 1\,{}^{м}\!/_{с^3}$ $\upsilon = 10\ {}^{м}\!/_{с}$ $a_n = ?$ $a_\tau = ?$	$\upsilon = \dfrac{dS}{dt} = 3Ct^2, \qquad (1)$ $a_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt} = 6Ct. \qquad (2)$ Время, за которое было достигнуто такое ускорение, можно найти из (1): $t = \sqrt{\dfrac{\upsilon}{3C}} \qquad (3)$ Подставив (3) в (2), получим

$$a_\tau = 6C\sqrt{\frac{\upsilon}{3C}} = 2\sqrt{3C\upsilon},$$

$$a_\tau = 2\sqrt{3\cdot 1\cdot 10} = 11\,{}^{м}\!/_{с^2}.$$

Нормальное ускорение поезда определяется по формуле

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R},$$

$$a_n = \frac{10^2}{400} = 0{,}25\,{}^{м}\!/_{с^2}.$$

Задача 8. Какой начальной скоростью должно обладать сигнальная ракета, выпущенная из ракетницы под углом 45^0 к горизонту, чтобы она вспыхнула в наивысшей точке траектории, если время горения запала ракеты 6 с? Сопротивление воздуха не учитывать.

Дано	Решение
$\alpha = 45^0$ $t = 6\,c$ $\upsilon_0 - ?$	

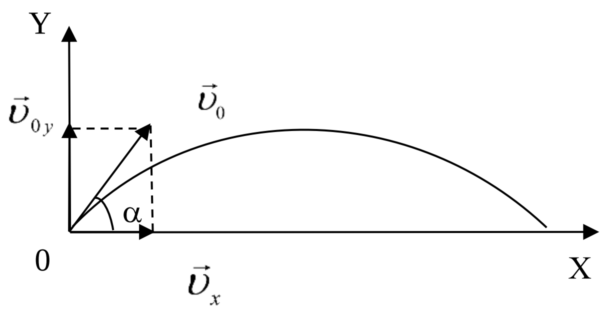


Рис. 6

Так как ракета движется с постоянным по величине и направлению ускорением g=9,8 м/с, то ее движение плоское и для его описания достаточно двух осей координат, что позволит сложное криволинейное движение ракеты рассматривать как совокупность двух прямолинейных движений. Если ось X направить по горизонтали, а ось Y – по вертикали, то вдоль оси X ракета движется равномерно, так как g_x=0, а вдоль оси Y – равнозамедленно. Ее скорость вдоль оси X υ_x постоянна, а вдоль оси Y она монотонно убывает, становясь равной нулю в высшей точке траектории. Начальная скорость $\vec{\upsilon}_0$

ракеты в месте ее старта равна векторной сумме скоростей $\vec{\upsilon}_x$ и $\vec{\upsilon}_{0y}$ (рис. 6):

$$\vec{\upsilon}_0 = \vec{\upsilon}_x + \vec{\upsilon}_{0y}.$$

Поскольку векторы $\vec{\upsilon}_x$, $\vec{\upsilon}_{0y}$ и $\vec{\upsilon}_0$ образуют прямоугольный треугольник, то:

$$\upsilon_{oy} = \upsilon_o \sin\alpha. \qquad (1)$$

Скорость равнозамедленного движения вдоль оси Y $\vec{\upsilon}_y$ связана с ускорением g и временем *t* известным из кинематики соотношением:

$$\upsilon_y = \upsilon_{0y} - gt.$$

В верхней точке траектории $\vec{\upsilon}_y = 0$, поэтому

$$\upsilon_{0y} = gt. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), получим

$$gt = \upsilon_0 \sin\alpha,$$

$$\upsilon_0 = \frac{gt}{\sin\alpha},$$

$$\upsilon_0 = \frac{9{,}8 \cdot 6}{\sin 45^0} = 83\,м/с.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Уравнение движения материальной точки имеет вид $S = A + 5Bt^3$. Выразить зависимость скорости и ускорения этой точки от времени движения. ($\upsilon = 15Bt^2$, $a = 30Bt$)

1.2. Уравнение движения материальной точки имеет вид $S = t + 2t^3, м$. Выразить зависимость скорости и ускорения этой точки от времени движения. ($\upsilon = 1 + 6t^2$, $a = 12t$)

1.3. Две материальные точки движутся согласно уравнениям $S_1 = 4t + 8t^3 - 16t^3, м$ и $S_2 = 2t - 4t^2 + t^3, м$. В какой момент времени ускорения этих точек будут одинаковыми? Найти скорости точек в этот момент.

($t = 0,24\,c$, $\upsilon_1 = 5,1\, м/с$, $\upsilon_2 = 0,25\, м/с$)

1.4. Движения двух материальных точек выражаются уравнениями $S_1 = 20 + 2t - 4t^2, м$ и $S_2 = 2 + 2t + 0,5t^2, м$. В какой момент времени скорости этих точек станут одинаковыми? Чему будут равны скорости и ускорения этих точек в этот момент?

($t = 0$, $\upsilon_1 = \upsilon_2 = 2\, м/с$, $a_1 = -8\, м/с^2$, $a_1 = 1\, м/с^2$)

1.5. Зависимость пути, пройденного телом, от времени дается уравнением $S = 6 - 3t + 2t^2, м$. Через сколько времени после начала движения ускорение тела станет равно 12 м/с^2? Чему будет равна скорость тела в этот момент?

($t = 1\,c$, $\upsilon = 3\, м/с$)

1.6. Координаты *x* и *y* материальной точки с течением времени изменяются по закону $x = K - Bt + At^2$ и $y = E + Dt + Ct^2$. Найти модули скорости и ускорения этой точки в момент времени *t*.

($\upsilon = \sqrt{(2At - B)^2 + (2Ct + D)^2}$, $a = 2\sqrt{A^2 + C^2}$)

1.7. Тело движется со скоростью υ_0. После начала торможения его ускорение стало изменяться по закону $a = -4kt^2$. Какой путь пройдет тело за время τ с момента начала торможения?

($S = \tau\left(\upsilon_0 - \dfrac{k\tau^3}{3}\right)$)

1.8. Тело движется со скоростью υ_0. После начала торможения его ускорение стало изменяться по закону $a = B - kt$, где B и k – константы. Какой путь пройдет тело за время τ с момента начала торможения?

($S = \upsilon_0\tau + \dfrac{\tau^2}{2}\left(b - \dfrac{k\tau^2}{6}\right)$)

1.9. Тело движется со скоростью υ_0. После начала торможения его ускорение стало изменяться по закону $a = 2c - 3kt$. Какова будет скорость тела через τ секунд после начала торможения?

($\upsilon = \upsilon_0 + \tau(2c - k\tau^2)$)

1.10. Автомобиль движется по закруглению шоссе, имеющему радиус кривизны 4 м. Уравнение движения автомобиля $S = A + Bt - Ct^2$, где A=5 м, B=10 м/с, C=4 м/с^2. Найти скорость, тангенциальное, нормальное и полное ускорение автомобиля в момент времени t=1 с.

($\upsilon = 2 м/с$, $a_\tau = -8 м/с^2$, $a_n = 1 м/с^2$, $a = 8{,}06 м/с^2$)

1.11. Материальная точка движется по окружности радиусом 0,5 м. Зависимость пути от времени дается уравнением $S = kt^3$, где $k = 1 см/с^3$. Найти полное ускорение точки в тот момент, когда ее скорость стала равна 0,3 м/с.

($a = \sqrt{\upsilon\left(12k + \frac{\upsilon^3}{R^2}\right)} = 0{,}26 м/с^2$)

1.12. Найти во сколько раз нормальное ускорение точки, лежащей на ободе вращающегося колеса, больше ее тангенциального ускорения для момента, когда вектор полного ускорения этой точки составляет угол 30^0 с вектором ее линейной скорости.

($\frac{a_n}{a_\tau} = tg\alpha = 0{,}58$)

1.13. Точка движется по окружности диаметром 40 см с постоянным тангенциальным ускорением 5 см/с^2. Через сколько времени после начала движения нормальное ускорение точки будет вдвое больше тангенциального?

(t=2,8 с)

1.14. Колесо радиусом 10 см вращается так, что зависимость линейной скорости точек, лежащих на ободе колеса, от времени дается уравнением $\upsilon = At + Bt^2$, где A=3 см/с^2 и B=1 см/с^3. Найти угол, составляемый вектором полного ускорения с радиусом колеса через 2 с от начала движения.

($\alpha = arctg\dfrac{(A+2Bt)R}{\left(At+Bt^2\right)^2} = 36^0$)

1.15. Автомобиль движется по закруглению шоссе, имеющему радиус кривизны 20 м. Уравнение движения автомобиля $S = 10t - 0,5t^2, м$. Найти скорость, тангенциальное, нормальное и полное ускорение автомобиля в момент времени 5 с.

($\upsilon = 5 м/с,\ a_\tau = -1 м/с^2,\ a_n = 1,25 м/с^2,\ a = 1,6 м/с^2$)

1.16. Колесо вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением $\varphi = A + Bt + 2Ct^2$, где A=const, B=0,4 рад/с^2, C=0,1рад/с^3. Найти радиус колеса, если к концу первой секунды его вращения нормальное ускорение точек на ободе колеса стало равно 2 м/с.

(R=1,02 м)

1.17. Диск радиусом 0,5 м вращается согласно уравнению $\varphi = A - Bt + Ct^3$, где A=3 рад, B=1 рад/с, C=0,1 рад/с^3. Определить полное ускорение точек на ободе диска для момента времени t=10 с.

($a = R\sqrt{\left(3Ct^2 - B\right)^4 + \left(6Ct\right)^2} = 421 м/с^2$)

1.18. Колесо, вращаясь равноускоренно, достигло угловой скорости 20 рад/с, сделав 10 оборотов после начала вращения. Найти угловое ускорение колеса. Чему равен полный угол, на который повернется колесо за время вращения?

($\varepsilon = \dfrac{\omega^2}{4\pi N} = 3,2\ рад/с^2,\ \varphi = \dfrac{\omega^2}{2\varepsilon} = 62,5\ рад$)

1.19. Колесо вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где A=const, B=1 рад/с, C=2 рад/с^3. Найти радиус колеса, если известно, что к концу второй секунды вращения тангенциальное ускорение точки стало равно 4,8 м/с.

($R = \dfrac{a_\tau}{6Ct} = 0,2\ м$)

1.20. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением ε. Через время t

после начала движения полное ускорение колеса стало равно a. Найти радиус колеса.

($R=\dfrac{a}{\varepsilon\sqrt{1+\varepsilon^2 t^4}}$)

1.21. Камень, брошенный горизонтально, упал на землю через 0,5 с на расстоянии 5 м по горизонтали от момента бросания. С какой высоты и с какой начальной скоростью он был брошен? С какой скоростью упал на землю?

(h=1,22 м; υ_0=10 м/с; υ=11,1 м/с)

1.22. Тело бросили со скоростью 10 м/с под углом 40^0 к горизонту. На какую высоту оно поднимется и на каком расстоянии от места бросания упадет? Сколько времени будет в движении?

($H=\dfrac{\upsilon_0^2\sin^2\alpha}{\alpha g}=2{,}1\,м,\ S=\dfrac{\upsilon_0^2\sin 2\alpha}{g}=10\,м,\ t=\dfrac{2\upsilon_0\sin\alpha}{g}=1c$)

1.23. Под каким углом к горизонту нужно бросить тело, чтобы дальность его полета была максимальной?

(α =45^0)

2. ОСНОВЫ ДИНАМИКИ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Второй закон Ньютона:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m},$$

где $\vec{a}$ – ускорение материальной точки, m – её масса, $\vec{F}$ – равнодействующая всех действующих на неё сил.

Сила:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad [F] = 1H.$$

Масса однородного тела связана с его плотностью ρ соотношением $m = \rho \cdot V$, где V – объем тела.

Импульс:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}, \quad [p] = 1\ \frac{кг \cdot м}{с},$$

где $\vec{\upsilon}$ – скорость материальной точки.

Основное уравнение динамики поступательного движения (более общая запись второго закона Ньютона):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

Третий закон Ньютона: две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по величине, противоположными по направлению и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки.

Сила тяжести $m\vec{g}$ – это сила, под действием которой тело падает на поверхность планеты с ускорением свободного падения.

Вес тела $\vec{P}$ – это сила, с которой тело действует на опору или растягивает подвес. Если тело покоится или движется равномерно прямолинейно относительно поверхности Земли, то

$$P = mg.$$

Если тело движется ускоренно вертикально вверх с ускорением $\vec{a}$ или замедленно вниз с таким же по модулю ускорением, то

$$P = m(g + a).$$

Перегрузка показывает, во сколько раз вес тела, движущегося с ускорением, больше веса неподвижного тела,

$$n = \frac{P}{P_0}.$$

Если тело движется вертикально вниз с ускорением $\vec{a}$ или замедленно вверх с таким же по модулю ускорением, то

$$P = m(g - a).$$

Максимальная *сила трения* покоя и сила трения скольжения прямо пропорциональны величине силы нормального давления, которая численно равна (по третьему закону Ньютона) силе реакции опоры N :

$$F_{тр} = \mu N,$$

где μ – коэффициент трения, безразмерная величина.

Закон всемирного тяготения: сила притяжения двух неподвижных материальных точек прямо пропорциональна произведению их масс и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{Н \cdot м^2}{кг^2}$ – гравитационная постоянная.

Закон Гука: сила упругости, возникающая в теле при упругой деформации, пропорциональна величине деформации и направлена в сторону, противоположную деформации:

$$\vec{F}_{упр} = -k\vec{x},$$

где k – жесткость или коэффициент упругости; x – деформация тела, равная абсолютному изменению его длины

Примеры решения задач

Задача 1. К нити подвешен груз массой 2 кг. Найти ускорение, с которым поднимают груз, если сила натяжения нити равна 40 Н (рис. 1).

Дано

$m = 2\ кг$

$F_н = 40\ Н$

$g = 10\ м/с^2$

$a - ?$

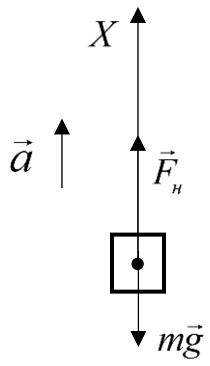


Рис. 1

Решение

По второму закону Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_н .$$

Для записи второго закона Ньютона в скалярном виде сонаправим ось OX с вектором ускорения:

$$ma = F_н - mg ,$$

$$a = \frac{F_н - mg}{m},\quad a = \frac{40 - 2 \cdot 10}{2} = 10\ м/с^2 .$$

Задача 2. Тело массой 100 кг перемещают равномерно и прямолинейно по горизонтальной поверхности, прилагая некоторую силу тяги F_T параллельно поверхности (рис. 2). Коэффициент трения скольжения 0,3. Найти величину силы тяги.

Дано

$m = 100\ кг$

$a = 0$

$\mu = 0,3$

$g = 10\ м/с^2$

$F_T - ?$

Решение

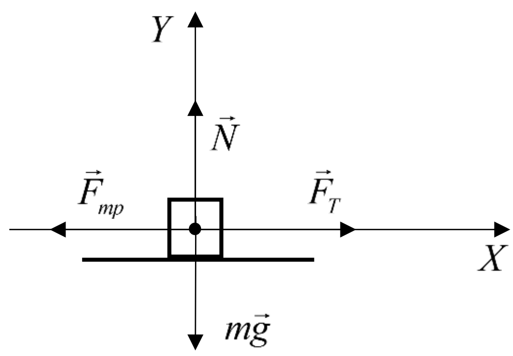


Рис. 2

Т.к. движение равномерное и прямолинейное,

$$\vec{F}_T + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = 0 .$$

Для записи в скалярном виде сонаправим ось OX с направлением движения тела, а ось OY – с вектором силы реакции опоры $\vec{N}$.

$$OX: \quad F_T = F_{тр},$$

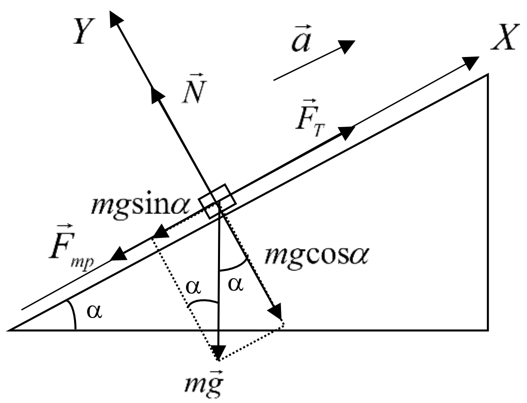
$$OY: \quad mg = N.$$

Кроме того, $F_{тр} = \mu N$.

Сила тяги, приложенная к телу

$$F_T = \mu mg, \quad F_T = 0,3 \cdot 100 \cdot 10 = 300\ H.$$

Задача 3. Автомобиль массой 1 т движется вверх по наклонной плоскости с уклоном $\alpha = 30^0$ (рис. 3), преодолевая её за 30 с. Уравнение его движения имеет вид $S = A + Bt^2 + Ct^3$, где $B = 2\ м/с^2$, $C = 1\ м/с^3$. Коэффициент трения скольжения 0,1. Найти силу тяги, развиваемую мотором автомобиля.

Дано	Решение
$m = 1000\ кг$ $\alpha = 30^0$ $\mu = 0,1$ $t = 30\ с$ $S = A + Bt^2 + Ct^3$ $B = 2\ м/с^2$ $C = 1\ м/с^3$ $F_T - ?$	 Рис. 3 По второму закону Ньютона $m\vec{a} = \vec{F}_T + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр}$.

Для записи второго закона Ньютона в скалярном виде сонаправим ось OX с вектором ускорения, а ось OY – с вектором силы реакции опоры $\vec{N}$:

$$OX: \quad ma = F_T - mg\sin\alpha - F_{тр},$$

$$OY: \quad N = mg\cos\alpha.$$

Поскольку $F_{тр} = \mu N$, то $F_{тр} = \mu mg\cos\alpha$.

Тогда сила тяги, развиваемая мотором автомобиля, равна

$$F_T = ma + mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha \,. \tag{1}$$

Найдём ускорение автомобиля:

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} = 2Bt + 3Ct^2,$$

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = 2B + 6Ct \,. \tag{2}$$

Подставив выражение (2) в (1), найдем искомую силу тяги:

$$F_T = m\left(\left(2B + 6Ct\right) + g\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)\right),$$

$$F_T = 1000\left(\left(2\cdot 2 + 6\cdot 1\cdot 30\right) + 10\left(\frac{1}{2} + 0{,}1\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 1898660\ Н \,.$$

Задача 4. Два груза массами 2 кг и 1 кг связаны тонкой нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый блок, и висят на высоте 1 м над полом, удерживаемые экспериментатором (рис. 4). За какое время груз большей массы достигнет пола, если грузы отпустить? Какая скорость будет у него в момент достижения пола?

Дано	Решение
$m_1 = 2\ кг$ $m_2 = 1\ кг$ $h = 1\ м$ $t - ?$ $\upsilon - ?$	

Блок невесомый, поэтому натяжение нити по обе стороны блока одинаково. Очевидно, что для нахождения искомого времени t и скорости υ нужно знать ускорение грузов a. При равноускоренном движении из состояния покоя ($\upsilon_0 = 0$)

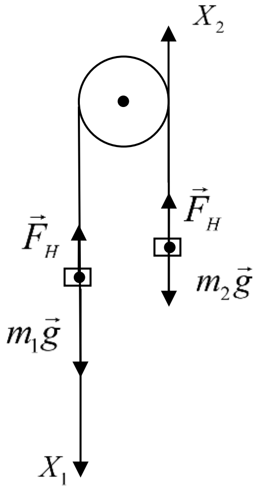


Рис. 4

$$h = \frac{at^2}{2},$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}}, \qquad (1)$$

$$\upsilon = at. \qquad (2)$$

Для нахождения ускорения воспользуемся вторым законом Ньютона:

$$m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{F}_н,$$

$$m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{F}_н.$$

Сонаправив оси координат OX_1 и OX_2 с векторами ускорений первого и второго тел, запишем уравнения второго закона Ньютона в скалярном виде:

$$OX_1: \qquad m_1a = m_1g - F_н,$$

$$OX_2: \qquad m_2a = F_н - m_2g.$$

Сложив эти уравнения и выполнив приведение подобных членов, получим:

$$m_1a + m_2a = m_1g - F_н + F_н - m_2g,$$

$$a = \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \qquad (3)$$

Подставив выражение (3) в формулы (1) и (2), получим искомые величины t и υ:

$$t = \sqrt{\frac{2h(m_1 + m_2)}{g(m_1 - m_2)}}, \qquad t = 0,78\,с,$$

$$\upsilon = \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} = \sqrt{\frac{2h(m_1 + m_2)}{g(m_1 - m_2)}} = \sqrt{\frac{2gh(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}}, \qquad \upsilon = 2,5\,{}^{м}\!/_{с}.$$

Задача 5. Невесомый блок укреплен на вершине двух наклонных плоскостей, составляющих с горизонтом углы $\alpha = 30^0$ и $\beta = 45^0$ (рис. 5). Гири равной массы $m_1 = m_2 = 1\,кг$ соединены нитью, перекинутой через блок. Найти ускорение, с которым движутся гири и натяжение нити. Трением пренебречь.

Решение

Дано

$\alpha = 30^0$

$\beta = 45^0$

$m_1 = m_2 = 1\ кг$

$a - ?$

$F_н - ?$

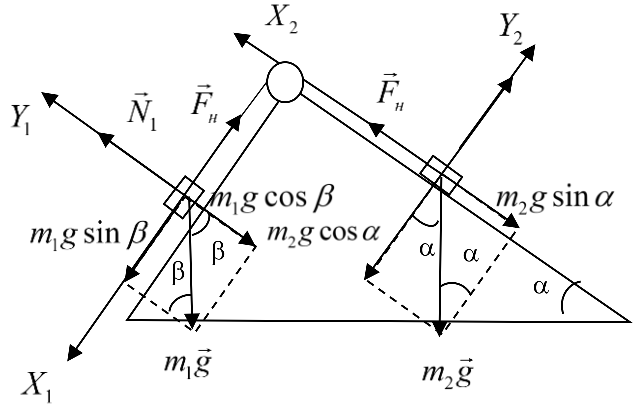


Рис. 5

Блок невесомый, поэтому натяжение нити по обе стороны блока одинаково.

Запишем второй закон Ньютона применительно к движению каждой гири в отдельности:

$$m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_н,$$

$$m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_н.$$

Для записи второго закона Ньютона в скалярном виде спроецируем силы, действующие на каждую гирю, на оси координат OX_1, OY_1 и OX_2, OY_2, сонаправив оси OX_1 и OX_2 с направлением ускорений соответствующих тел. Учтем, что $\beta > \alpha$ и силы тяжести, действующие на гири, равны по величине (так как равны массы гирь), $m_1 g = m_2 g$. Проекция силы тяжести на OX_1, равная $m_1 g\sin\beta$, будет больше проекции силы тяжести на ось OX_2 $m_2 g\sin\alpha$, поэтому гиря m_1 будет двигаться вниз по наклонной плоскости, а гиря m_2 – вверх.

$$OX_1: \quad m_1 a = m_1 g\sin\beta - F_н \qquad (1)$$

$$OX_2: \quad m_2 a = F_н - m_2 g\sin\alpha \qquad (2)$$

Получили два уравнения с двумя неизвестными величинами a и $F_н$. Для их решения исключим вначале одну из неизвестных величин, например,

$F_н$. Для этого сложим левые и правые части уравнений (1) и (2) и выполним приведение подобных членов:

$$m_1a + m_2a = m_1g\sin\beta - F_н + F_н - m_2g\sin\alpha,$$

$$a = \frac{g\left(m_1\sin\beta - m_2\sin\alpha\right)}{m_1 + m_2},$$

$$a = \frac{9{,}8\left(1\cdot\sin 45^0 - 1\cdot\sin 30^0\right)}{2} = 1{,}01\, {}^{м}\!/\!{}_{с^2}.$$

Силу натяжения нити найдем, например, из уравнения (1):

$$F_н = m_1g\sin\beta - m_1a,$$

$$F_н = 1\cdot 9{,}8\sin 45^0 - 1\cdot 1{,}01 = 5{,}9\ Н.$$

Задача 6. Три тела массами $m_1 = 1\,кг$, $m_2 = 5\,кг$, $m_3 = 2\,кг$ связаны одной тонкой нерастяжимой нитью, перекинутой через два невесомых блока, укрепленных на краях стола (рис. 6). Тела движутся вправо под действием всех приложенных сил равномерно и прямолинейно. Определить коэффициент трения скольжения второго тела о поверхность стола.

Дано

$m_1 = 1\,кг$

$m_2 = 5\,кг$

$m_3 = 2\,кг$

$a = 0$

$\mu - ?$

Решение

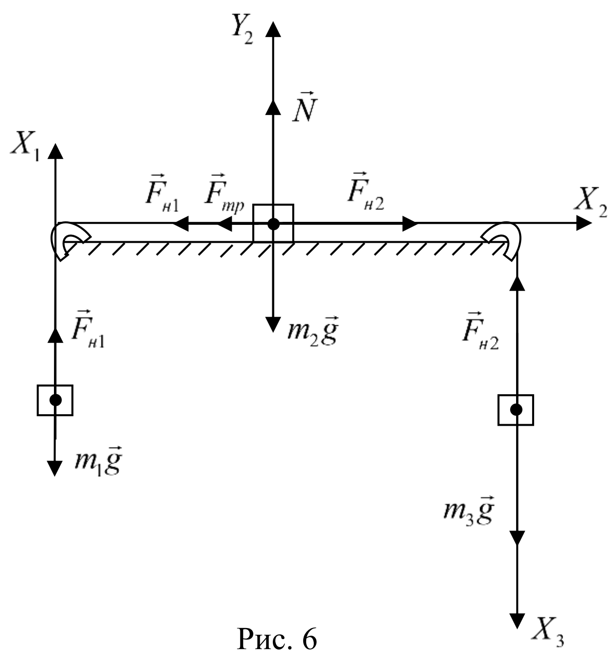


Рис. 6

Для тела m_1:

$m_1\vec{g} + \vec{F}_{н1} = 0$,

OX_1: $F_{н1} = m_1 g$. (1)

Для тела m_2:

$m_2\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{н1} + \vec{F}_{н2} + \vec{F}_{тр} = 0$,

OX_2: $F_{н2} = F_{н1} + F_{тр}$,

OY_2: $N = m_2 g$,

Кроме того, $F_{тр} = \mu N = \mu m_2 g$, следовательно, $F_{н2} = F_{н1} + \mu m_2 g$. (2)

Для тела m_3:

$m_3\vec{g} + \vec{F}_{н2} = 0$,

$F_{н2} = m_3 g$. (3)

Подставив (1) и (3) в (2), получим

$$m_3 g = m_1 g + \mu m_2 g,$$

$$m_3 = m_1 + \mu m_2,$$

$$\mu = \frac{m_3 - m_1}{m_2}, \qquad \mu = \frac{2-1}{5} = 0,2 .$$

Задача 7. Материальная точка массой m движется по окружности радиусом R с частотой ν равномерно. Найти изменение импульса этой точки через четверть оборота, пол-оборота, три четверти оборота и через полный оборот.

Дано

m, R, ν

$\upsilon = const$

$t = \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$

$\Delta p - ?$

Решение

Пусть в момент времени $t = 0$ материальная точка массой m проходит точку 1 (рис. 7) и далее движется по окружности по часовой стрелке. Вектор импульса $\vec{p}_1$ направлен по касательной. а его модуль равен

$$p_1 = m\upsilon .$$

В момент времени $t = \frac{T}{4}$ материальная точка окажется в точке 2. Изменение импульса точки за четверть оборота равно

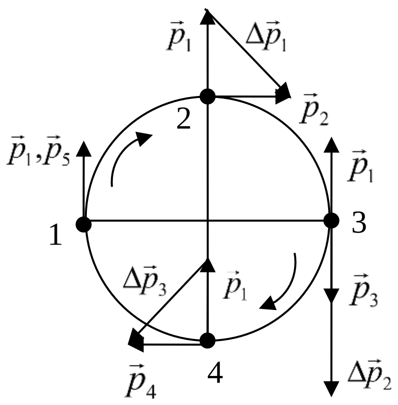


Рис. 7

$$\Delta\vec{p}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_1,$$

Для нахождения модуля изменения импульса учтём, что вектор $\Delta\vec{p}_1$ является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$, численно равными друг другу, т.к. масса и линейная скорость точки в процессе ее движения не изменяются. Тогда по теореме Пифагора

$$\Delta p_1 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \sqrt{(m\upsilon)^2 + (m\upsilon)^2} = m\upsilon\sqrt{2}\,. \qquad (1)$$

Линейную скорость точки υ можно выразить через ее угловую скорость ω, а ту, в свою очередь, – через известную частоту:

$$\omega = 2\pi\nu\,,$$

$$\upsilon = \omega R = 2\pi\nu R\,.$$

Подставим выражение для υ в (1):

$$\Delta p_1 = 2\sqrt{2}\cdot\pi\nu Rm\,.$$

Очевидно, что на такую же величину изменится импульс точки через три четверти оборота ($t = \frac{3T}{4}$). Поэтому

$$\Delta p_3 = \Delta p_1 = 2\sqrt{2}\cdot\pi\nu Rm\,.$$

Через пол-оборота ($t = \frac{T}{2}$) векторы импульсов $\vec{p}_3$ и $\vec{p}_1$ в точке 3 окажутся противоположно направлены, поэтому в векторной форме изменение импульса равно

$$\Delta\vec{p}_2 = \vec{p}_3 - \vec{p}_1,$$

а в скалярной, если считать направление импульса $\vec{p}_3$ положительным, перед численным значением импульса $\vec{p}_1$ надо поставить “минус”

$$\Delta p_2 = p_3 - p_1 = m\upsilon + m\upsilon = 2m\upsilon = 4\pi\nu Rm .$$

Через полный оборот ($t = T$) импульсы $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_5$ станут сонаправленными, а так как они численно равны, то изменение импульса точки равно нулю

$$\Delta p_4 = p_5 - p_1 = m\upsilon - m\upsilon = 0 .$$

Задача 8. Какой должна быть максимальная скорость автомобиля при развороте радиусом 15 м на горизонтальной дороге? Коэффициент трения шин об асфальт 0,6.

Дано	Решение
$R = 15\ м$	
$\mu = 0{,}6$	
$\upsilon - ?$	

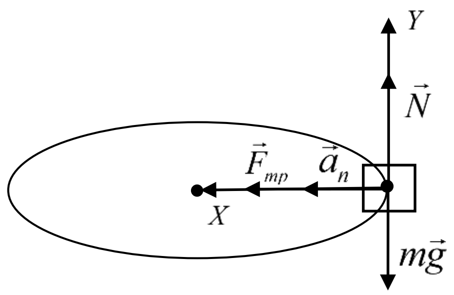


Рис. 8

Если тело движется равномерно по окружности, нормальное ускорение $\vec{a}_n$ направлено к центру окружности (рис. 8):

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}, \Rightarrow \ \upsilon = \sqrt{a_n \cdot R} .$$

По второму закону Ньютона:

$$m\vec{a}_n = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} ,$$

OX : $F_{тр} = ma_n$,

OY : $N = mg$,

$F_{тр} = \mu N = \mu mg$.

Нормальное ускорение

$$a_n = \mu g\ ,$$

Тогда скорость автомобиля:

$$\upsilon = \sqrt{\mu g R}\ , \quad \upsilon = 9{,}5\ ^{м}\!/_{с}\ .$$

Задача 9. Какую перегрузку испытывает космонавт массой m, если космический корабль, стартуя с Земли вертикально вверх, на высоте H достигает скорости υ? Каков будет вес космонавта, если он будет опускаться с прежним ускорением? Движение корабля равноускоренное.

Решение

Дано

$\upsilon_0 = 0\ H$

m

υ

$n - ?$

$P - ?$

1. Перегрузка космонавта

$$n = \frac{P}{P_0}\ ,$$

где P – вес космонавта в космическом корабле, поднимающемся с ускорением вертикально вверх; $P_0 = mg$ – вес космонавта в состоянии покоя.

На космонавта действуют сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила тяжести $m\vec{g}$ (рис. 9). По второму закону Ньютона

$$ma = N - mg\ .$$

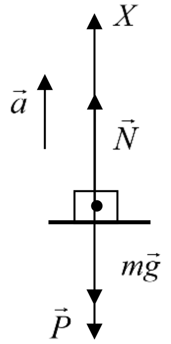


Рис. 9

По третьему закону Ньютона

$$P = N\ .$$

Следовательно,

$$ma = P - mg\ ,$$

$$P = mg + ma\ ,$$

$$n = \frac{P}{P_0} = \frac{m(g+a)}{mg} = \frac{g+a}{g} = 1 + \frac{a}{g}\ .$$

Найдём ускорение корабля:

$$\upsilon^2 - \upsilon_0^2 = 2aH\ , \qquad \upsilon^2 = 2aH\ , \qquad a = \frac{\upsilon^2}{2H}\ ,$$

$$n = 1 + \frac{\upsilon^2}{2gH}.$$

2. При спуске космического аппарата (рис. 10)

$$ma = mg - N.$$

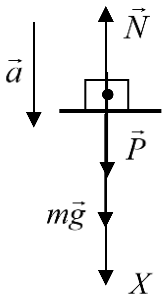


Рис. 10

По третьему закону Ньютона

$$P = N,$$

следовательно,

$$ma = mg - P,$$

$$P = mg - ma = m(g - a) = m\left(g - \frac{\upsilon^2}{2H}\right).$$

Задача 10. Геостационарный спутник запущен на круговую орбиту и все время находится над одной и той же точкой Земли. Найти высоту H спутника над земной поверхностью: радиус Земли R известен.

Дано	Решение
$T = 24$ ч R $H - ?$	Нахождение спутника над одной и той же точкой Земли свидетельствует о том, что период вращения спутника по его орбите равен периоду суточного вращения Земли T=24 ч.

По второму закону Ньютона произведение массы спутника на его нормальное ускорение равно силе тяготения спутника и Земли (действием других сил на спутник пренебрегаем),

$$ma_n = F_{тяг} \quad (1)$$

Нормальное ускорение спутника связано с его угловой скоростью:

$$a_n = \omega^2 r,$$

где $\omega = \frac{2\pi}{T}$, r – расстояние от спутника до центра Земли. Его можно представить как сумму расстояния H от спутника до земной поверхности и радиуса Земли R:

$$r = R + H,$$

$$a_n = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot (R+H). \tag{2}$$

По закону всемирного тяготения:

$$F_{тяг} = G\frac{mM}{(R+H)^2}, \tag{3}$$

где M – масса Земли, m – масса спутника.

Подставим выражения (2) и (3) в (1):

$$G\frac{mM}{(R+H)^2} = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot (R+H),$$

$$(R+H)^3 = GM\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2,$$

$$R+H = \sqrt[3]{GM\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2},$$

$$H = \sqrt[3]{GM\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2} - R.$$

Полученное выражение можно упростить. На земной поверхности силу тяжести, действующую на тело массой m, можно считать численно равной силе притяжения этого тела к Земле (если пренебречь суточным вращением Земли и считать Землю шаром). Тогда

$$mg = G\frac{mM}{R^2},$$

откуда

$$GM = gR^2.$$

Подставим в (4) вместо GM выражение gR^2:

$$H = \sqrt{g\left(\frac{RT}{2\pi}\right)^2} - R.$$

Задача 11. Между двумя пружинами, жесткости которых $k_1 = 200\,Н/м$ и $k_2 = 100\,Н/м$, закреплен груз массой 700 г. Ко второй пружине (рис. 11) приложена постоянная горизонтальная сила $\vec{F}$ так, что груз неподвижен.

Найдите величину силы $\vec{F}$, если терния между грузом и опорой нет, а удлинение первой пружины равно 4 см.

Решение

Дано

$M = 0{,}7$ кг

$k_1 = 200\ H/м$

$k_2 = 100\ H/м$

$x = 4\ см$

$F - ?$

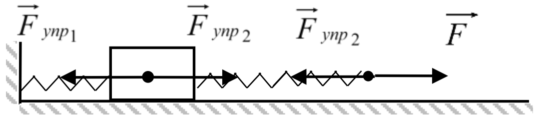


Рис. 11

Сила F является деформирующей силой; по 3-му закону Ньютона

$$\vec{F} = -\vec{F}_{упр2},$$

где $F_{упр_2}$ – сила упругости, возникающая во 2-й пружине; при этом в первой пружине возникает сила упругости

$$F_{упр1} = k_1 x_1.$$

Т.к. система покоится, $\begin{cases} F = F_{упр_2} \\ F_{упр_1} = F_{упр_2} \end{cases}$

$$F = F_{упр1} = k_1 x_1, \qquad F = 200 \cdot 0{,}04 = 8\ H.$$

Задачи для самостоятельного решения

2.1. К нити подвешен груз массой 1 кг. Найти натяжение нити, если нить с грузом поднимать с ускорением 5 м/с, а затем опускать с тем же ускорением.

($F_{н1} = 14{,}8\ H$, $F_{н2} = 4{,}8\ H$)

2.2. С каким ускорением надо поднимать на нити гирю, чтобы нить разорвалась, если при подъеме этой гири с ускорением 2 м/с^2 натяжение нити вдвое меньше того натяжения, при котором нить разрывается?

($a = 13{,}8\ м/с^2$)

2.3. Автомобиль массой 1020 кг останавливается при торможении за 5 с на пути 25 м. Найти начальную скорость и силу торможения.

($\upsilon_0 = \dfrac{2S}{t} = 10 \, м/с$, $F_{тр} = \dfrac{2mS}{t^2} = 2040 \, H$)

2.4. Поезд массой 500 т при равнозамедленном торможении уменьшает скорость от 40 км/ч до 28 км/ч за 1 минуту. Найти тормозящую силу.

($F_{тр} = 27700 \, H$)

2.5. Тело массой 0,5 кг движется прямолинейно, при этом зависимость пройденного телом пути от времени дается уравнением $S = A - Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $C = 5 \, м/с^2$, $D = 1 \, м/с^3$. Найти силу, действующую на тело в конце первой секунды движения.

($F = m\left(2C - 6Dt\right) = 2 \, H$)

2.6. Сила, действующая на тело массой m, изменяется по закону $F = A + 3Bt^2$. Какова будет скорость тела через t секунд от начала движения?

($\upsilon = \dfrac{t}{m}\left(A + Bt^2\right)$)

2.7. Тело массой m движется под действием переменной силы, которая изменяется с течением времени по закону $F = A + Bt + Ct^2$, где A, B и C – постоянные величины. Какой путь пройдет тело через t секунд после начала движения?

(Ответ: $S = \dfrac{t^2}{2m}\left(A + \dfrac{B}{3} \cdot t + \dfrac{c}{6} \cdot t^2\right)$).

2.8. Груз массой 100 г равномерно движется вверх по наклонной плоскости, составляющей 30^0 с горизонтом, если к нему вдоль плоскости приложена сила 600 Н. С каким ускорением этот груз, предоставленный самому себе, будет двигаться вниз?

($a = 3{,}81 \, м/с^2$)

2.9. Тело массой m движется равноускоренно вверх по наклонной плоскости с углом наклона к горизонту, равным α. Уравнение его движения

$S = A + Bt + Ct^2$. Найти силу тяги, действующей на тело, если коэффициент трения между телом и плоскостью равен μ.

($F = m\left(2C + g\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)\right)$).

2.10. Найти силу тяги, развиваемую мотором автомобиля, движущегося в гору с ускорением 1 м/с, если уклон горы составляет 1 м на каждые 25 м пути, масса автомобиля 1 т, а коэффициент трения 0,1.

($F = 2{,}37\ H$)

2.11. Тело скользит по наклонной плоскости (α =45^0). Пройдя 36,4 см, оно приобретает скорость 2 м/с. Чему равен коэффициент трения?

($\mu = tg\alpha - \dfrac{\upsilon^2}{2gS\cos\alpha} = 0{,}2$)

2.12. Тело скользит равноускоренно по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 45^0. Зависимость пройденного телом пути от времени дается уравнением $S = Ct^2$, где $C = 1{,}73\ м/с^2$. Найти коэффициент трения.

($\mu = tg\alpha - \dfrac{2C}{g\cos\alpha} = 0{,}5$)

2.13. Через неподвижный и невесомый блок переброшен шнур, к концам которого привязаны грузы массами 2 кг и 1,5 кг. Найти натяжение шнура.

($F_н = \dfrac{2m_1m_2g}{m_1 + m_2} = 16{,}8\ H$)

2.14. Две гири массой 2 кг и 1,5 кг соединены нитью, перекинутой через неподвижный блок, массой которого можно пренебречь. Найти ускорение гирь. Трением в блоке пренебречь.

($a = \dfrac{g(m_1 - m_2)}{m_1 - m_2} = 1{,}4\ м/с^2$)

2.15. Две гири массой 2 кг и 1,5 кг соединены нитью, перекинутой через блок. Массой блока и трением в нем можно пренебречь. Найти путь, пройденный гирями за 1,5 с после начала движения.

($S = \dfrac{gt^2(m_2 - m_1)}{2(m_1 + m_2)} = 1{,}6\ м$)

2.16. Две гири массами 2 кг и 1 кг соединены нитью, перекинутой через невесомый блок на краю стола. Коэффициент трения гири массой 2 кг о стол 0,1. Найти ускорение, с которым движутся гири. Трением в блоке пренебречь.

($a = \dfrac{g(m_2 - \mu m_1)}{m_1 + m_2} = 2{,}6\ {м}/{с^2}$)

2.17. Невесомый блок укреплен на вершине наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 60^0. Гири равной массы по 1 кг соединены нитью, перекинутой через блок. Коэффициент трения для гири, скользящей по наклонной плоскости, об ее поверхность равен 0,1. Найти натяжение нити, соединяющей гири. Движение равноускоренное.

($F_н = \dfrac{mg}{2}\left(1 + \sin\alpha + \mu\cos\alpha\right) = 9{,}6\ H$)

2.18. На гладком столе лежит брусок массой 4 кг. К бруску привязаны шнуры, перекинутые через неподвижные блоки. К концам шнуров подвешены гири массами 1 кг и 2 кг. С каким ускорением движется брусок и каково натяжение нитей? Трением и массой блоков пренебречь.

($a = \dfrac{g(m_3 - m_2)}{m_1 + m_2 + m_3} = 1{,}4\ {м}/{с^2}$, $F_{н1} = m_2(a + g) = 11{,}2\ H$, $F_{н2} = m_3(g - a) = 16{,}8\ H$)

2.19. Материальная точка массой 1 кг, двигаясь равномерно, описывает четверть окружности радиусом 1,2 м в течение 2 с. Найти изменение импульса этой точки.

($\Delta p = \dfrac{\pi m R}{t\sqrt{2}} = 1{,}3\ \dfrac{кг \cdot м}{с}$)

2.20. Тягач с грузом массой 25 т может развить скорость до 75 км/ч. Может ли он пройти на максимальной скорости по вогнутому мосту, выдерживающему нагрузку 300 кН, радиус кривизны которого 100 м? С какой максимальной скоростью тягач сможет проехать через этот мост?

(не может; $\upsilon_{\max} = 53{,}3\ {км}/{ч}$)

2.21. Автомобиль движется по выпуклому мосту с радиусом кривизны 60 м. При каком значении скорости он не оказывает давление на опору в верхней точке моста?

($\upsilon = \sqrt{gR} = 87{,}3\, {км}/{ч}$)

2.22. Самолет выполняет петлю Нестерова радиусом 1 км со скоростью 720 км/ч. С какой силой летчик массой 80 кг давит на сиденье самолета в верхней и нижней точках петли? Какова перегрузка летчика в нижней точке?

($F_1 = 2{,}42\, H$, $F_1 = 3{,}98\, H$, $n = 5{,}08$)

2.23. Человек стоит на краю круглой горизонтальной платформы радиусом 4 км. Какова должна быть частота ее вращения вокруг вертикальной оси, чтобы человек не смог удержаться на ней при коэффициенте трения 0,27.

(ν=0,129 $с^{-1}$)

2.24. На вращающемся столике лежит шайба на расстоянии 30 см от оси вращения. При какой угловой скорости вращения шайба начнет соскальзывать со столика, если коэффициент трения между шайбой и поверхностью столика равен 0,4?

(ω=3,62 рад/с)

2.25. Найти перегрузку, испытываемую космонавтом в ракете, взлетающей вертикально вверх, если ее высота возрастает с течением времени по закону $h = 2Ct^2$, где $C = 10\, {м}/{с^2}$.

($n = 1 + \frac{4C}{g} = 5$)

2.26. Вес неподвижного лифта с пассажирами $8 \cdot 10^3$ Н. В каком направлении движется лифт, если натяжение троса, поддерживающего кабину, равно $6 \cdot 10^3$ Н? Какой путь пройдет кабина за 1 с сначала движения и какова будет ее скорость в конце этого пути?

($S = \frac{gt^2}{2}(1 - \frac{F_н}{P}) = 1{,}4\, м$, $\upsilon = \frac{2S}{t} = 2{,}8\, {м}/{с}$)

2.27. Геостационарный спутник запущен на круговую орбиту и все время висит над одной и той же точкой планеты массой M. Период вращения планеты вокруг своей оси равен T. Найти линейную скорость спутника на орбите.

($\upsilon = \sqrt[3]{\frac{2\pi GM}{T}}$)

2.28. Искусственный спутник движется вокруг Земли с линейной скоростью υ на расстоянии r от ее центра. Зная радиус Земли R, найти среднюю плотность вещества планеты.

($\rho = \frac{3\upsilon r^2}{4\pi GR^3}$)

2.29. Каково ускорение свободного падения на высоте, равной половине радиуса Земли?

($g = \frac{4g_0}{9} = 4{,}4\ м/с^2$)

2.30. Если подвесить к пружине груз массой 0,3 кг, то пружина станет длиннее на 4,5 см. Определите удлинение пружины, если к ней подвесить еще два груза по 0,3 кг.

($x_2 = 0{,}135\ м$)

2.31. Под действием груза пружина удлинилась на 1 см. Этот же груз подвесили к пружине с вдвое большей жесткостью. Чему стало равно удлинение пружины?

($x_2 = 0{,}005\ м$)

3. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Работа постоянной силы $\vec{F}$, составляющей некоторый угол α с направлением перемещения $\vec{S}$:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S} = FS\cos\alpha, [A] = 1Дж .$$

Работа переменной силы на всем пути *S*:

$$A = \int_S \vec{F} d\vec{S} ,$$

где $d\vec{S}$ – вектор элементарного перемещения, $\vec{F}$ – сила, действующая на тело на участке пути dS .

Мощность постоянной силы:

$$N = \frac{A}{t}, \qquad [N] = 1Вт , \qquad A = N \cdot t .$$

Мгновенная мощность:

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{FdS\cos\alpha}{dt} = F\upsilon cos\alpha ,$$

где $\upsilon = \dfrac{dS}{dt}$ – скорость точки приложения силы.

Так как $\quad N = \dfrac{dA}{dt}, \qquad dA = Ndt, \qquad A = \int\limits_0^t Ndt .$

Кинетическая энергия движущегося тела:

$$A = \Delta E_к , \qquad E_к = \frac{m\upsilon^2}{2} .$$

Потенциальная энергия

В поле сил тяжести вблизи земной поверхности потенциальная энергия тела массой m , поднятого на высоту h над поверхностью, равна

$$E_p = mgh\,.$$

Потенциальная энергия упруго деформированного тела:

$$E_p = \frac{kx^2}{2}\,,$$

где k – коэффициент упругости, x – деформация тела.

Полная механическая энергия тела:

$$E = E_к + E_p\,.$$

Закон сохранения механической энергии: в поле только консервативных сил полная механическая энергия изолированной системы тел остается постоянной.

Закон сохранения и превращения полной энергии: полная энергия изолированной системы есть величина постоянная.

Полная энергия системы равна сумме всех видов энергии, которыми обладает система.

Закон сохранения импульса: импульс замкнутой системы материальных точек остается постоянным.

Скорости двух тел после прямого абсолютно упругого центрального удара:

$$\vec{\upsilon}_1 = \frac{\vec{\upsilon}_{01}\left(m_1 - m_2\right) + 2m_2\vec{\upsilon}_{02}}{m_1 + m_2}\,,$$

$$\vec{\upsilon}_2 = \frac{\vec{\upsilon}_{02}\left(m_2 - m_1\right) + 2m_1\vec{\upsilon}_{01}}{m_1 + m_2}\,.$$

Общая скорость тел после абсолютно неупругого центрального удара:

$$\vec{\upsilon} = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}\,.$$

Примеры решения задач

Задача 1. На моторную лодку, движущуюся на север, действует ветер с постоянной по величине силой F. Направление ветра меняется по закону $\alpha = BS$, где α – угол между направлением силы ветра $\vec{F}$ и перемещением $\vec{S}$, B – постоянная величина. Найти работу ветра, если его направление изменилось с южного на восточный.

Дано	Решение
$\alpha = BS$ F B $A - ?$	Поскольку на лодку действует переменная по направлению сила, работу ветра следует определять интегрированием. При этом элементарная работа на перемещении $d\vec{S}$ равна $dA = F \cdot dS \cdot \cos\alpha$.

По условию $\alpha = BS$, следовательно

$$d\alpha = B \cdot dS, \qquad dS = \frac{d\alpha}{B},$$

$$dA = \frac{F}{B} \cdot \cos\alpha \cdot d\alpha,$$

$$A = \int dA = \int_0^{90^0} \frac{F}{B} \cos\alpha \cdot d\alpha = \frac{F}{B} \int_0^{90^0} \cos\alpha \cdot d\alpha = \frac{F}{B} \sin\alpha \Big|_0^{90^0} = \frac{F}{B}.$$

Пределы интегрирования выбраны, исходя из следующих соображений. Когда лодка плыла на север, а ветер дул тоже с юга на север, угол между векторами силы ветра $\vec{F}$ и перемещением лодки $\vec{S}$ был равен нулю, а когда ветер стал дуть на восток, а лодка по-прежнему плыла на север, этот угол стал равен 90^0.

Задача 2. Автомобиль массой 1 т движется под гору при выключенном моторе с постоянной скоростью. Уравнение его движения $S = A + 15Bt$, где $A = 5\ м$, $B = 1\ м/с$. Уклон горы составляет 4 м на каждые 100 м пути. Какую мощность должен развивать двигатель этого автомобиля, чтобы двигаться с той же скоростью в гору с тем же уклоном? Силу трения считать в обоих случаях постоянной.

Дано

$m = 1000\ кг$

$S = A + 15Bt$

$A = 5\ м$

$B = 1\ м/с$

$h = 4\ м$

$\ell = 4\ м$

$F_{тр} = const$

$\upsilon = const$

$N - ?$

Решение

Мощность, развиваемая двигателем этого автомобиля при равномерном прямолинейном движении:

$$N = F_T \cdot \upsilon,$$

где F_T – сила тяги, υ – скорость автомобиля (векторы $\vec{F}_T$ и $\vec{\upsilon}$ сонаправлены).

Найдём силу тяги и скорость. При спуске автомобиля с горы движение – равномерное и прямолинейное. По первому закону Ньютона (рис. 1):

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = 0.$$

В проекции на ось OX:

$$F_{тр} = mg\sin\alpha. \qquad (1)$$

При движении автомобиля вверх по наклонной плоскости на него будут

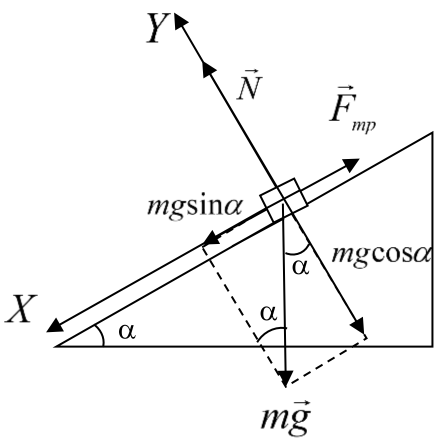


Рис. 1

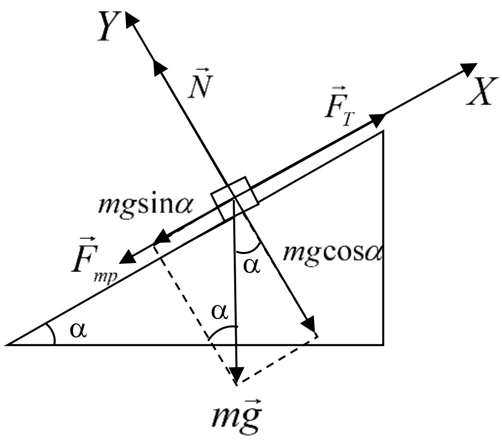


Рис. 2

действовать четыре силы, поскольку к прежним трем добавится сила тяги мотора $\vec{F}_T$ (рис. 2):

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} + \vec{F}_T = 0.$$

В проекции на ось OX:

$$F_T = F_{mp} + mg\sin\alpha . \qquad (2)$$

Подставив (1) в (2), получим:

$$F_T = 2mg\sin\alpha .$$

Т.к. $\sin\alpha = \dfrac{h}{\ell}$,

$$F_T = \frac{2mgh}{\ell} .$$

Скорость автомобиля

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} = 15B .$$

Мощность, развиваемая двигателем этого автомобиля

$$N = \frac{30Bmgh}{\ell}, \quad N = \frac{30\cdot 1\cdot 1000\cdot 10\cdot 4}{4} = 0{,}3\,MBm .$$

Задача 3. Снаряд, летевший горизонтально, разорвался на высоте 30 м на два равных осколка. Один осколок упал через 1с точно под местом взрыва. Какова будет скорость второго осколка и в каком направлении он станет двигаться? На каком расстоянии от точки падения первого осколка упадет второй осколок? Скорость снаряда до взрыва 80 м/с.

Дано

$m_1 = m_2 = m/2$

$h = 30\ м$

$t = 1\ c$

$\upsilon = 80\ м/c$

$\upsilon_2 - ?$

$\alpha - ?$

$S - ?$

Решение

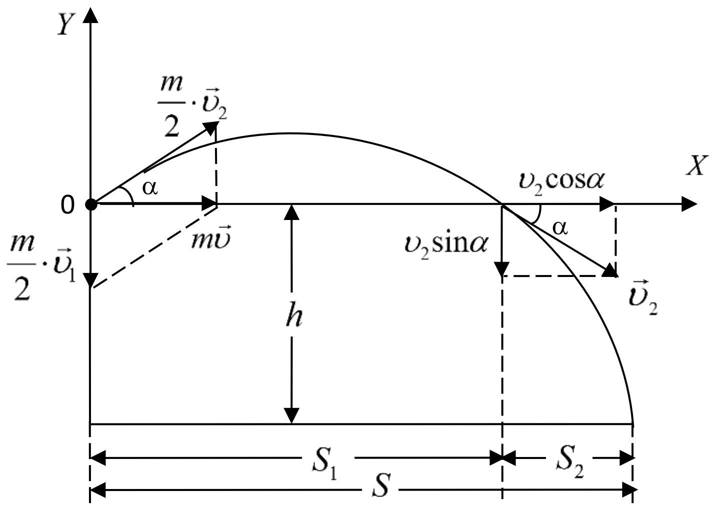


Рис. 3

Из рис. 3 следует, что искомое расстояние S можно представить как сумму двух расстояний S_1 и S_2:

$$S = S_1 + S_2,$$

где S_1 – расстояние, которое пролетал второй осколок по горизонтали до момента, когда он снова оказался на высоте h, и S_2 – расстояние, которое он пролетал по горизонтали с этого момента до своего падания на землю.

Очевидно, что для нахождения этих расстояний надо определить скорость второго осколка $\vec{\upsilon}_2$, которую он приобрел сразу после взрыва снаряда. По закону сохранения импульса импульс снаряда $m\vec{\upsilon}$ до разрыва равен сумме импульсов первого и второго осколков сразу после разрыва снаряда:

$$m\vec{\upsilon} = \frac{m\vec{\upsilon}_1}{2} + \frac{m\vec{\upsilon}_2}{2}.$$

Следует отметить, что этот закон справедлив только для замкнутых систем, а снаряд, строго говоря, не является замкнутой системой, поскольку на него действует внешняя сила тяжести. Но силы, возникающие в момент разрыва снаряда, столь велики, что величиной силы тяжести по сравнению с ними можно пренебречь и считать разрывающийся на осколки снаряд замкнутой системой.

Для записи соотношения между импульсами снаряда и осколков в скалярном виде воспользуемся теоремой Пифагора:

$$\left(\frac{m\upsilon_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{m\upsilon_1}{2}\right)^2 + \left(m\upsilon\right)^2,$$

$$\upsilon_2^2 = \upsilon_1^2 + 4\upsilon^2,$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{\upsilon_1^2 + 4\upsilon^2}. \qquad (1)$$

Найдем направление полета второго осколка, т. е. угол между вектором $\vec{\upsilon}_2$ и линией горизонта:

$$tg\alpha = \frac{\frac{m\upsilon_1}{2}}{m\upsilon} = \frac{\upsilon_1}{2\upsilon}. \qquad (2)$$

Найдём υ_1, воспользовавшись соответствующей формулой равноускоренного движения, поскольку падение осколка снаряда можно считать свободным.

$$h = \upsilon_1 t + \frac{gt^2}{2}, \quad \upsilon_1 t = h - \frac{gt^2}{2}, \quad \upsilon_1 = \frac{2h - gt^2}{2t}.$$

Подставив полученное выражение в формулы (1) и (2), найдем υ_2 и $tg\alpha$:

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{\left(2h - gt^2\right)^2}{4t^2} + 4\upsilon^2}, \tag{3}$$

$$tg\alpha = \frac{2h - gt^2}{4\upsilon t}. \tag{4}$$

Найдем расстояние S. Очевидно, что второй осколок будет двигаться вдоль оси OX равномерно со скоростью $\upsilon_2 \cos\alpha$ и одновременно взлетать вверх с начальной скоростью $\upsilon_2 \sin\alpha$, двигаясь равнозамедленно (рис. 3). При этом время его взлета t_1 до высшей точки траектории ($\upsilon_y = 0$) равно времени опускания на прежнюю высоту h, и, согласно формуле $\upsilon_y = \upsilon_{oy} + gt_1$, равно:

$$t_1 = \frac{\upsilon_{oy} - \upsilon_y}{g} = \frac{\upsilon_2 \sin\alpha}{g}.$$

Поскольку второй осколок пролетит расстояние S_1 за время $2t_1$, двигаясь со скоростью $\upsilon_2 \cos\alpha$, то расстояние S_1 равно

$$S_1 = 2\upsilon_2 t_1 \cos\alpha = 2\upsilon_2 \frac{\upsilon_2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g} = \frac{2\upsilon_2^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}.$$

Расстояние S_2 второй осколок пролетел за некоторое время t_2, равномерно двигаясь со скоростью $\upsilon_2 \cos\alpha$, и одновременно свободно падая с высоты h с начальной скоростью $\upsilon_2 \sin\alpha$ и ускорением g.

$$S_2 = \upsilon_2 t_2 \cos\alpha,$$

$$h = \upsilon_2 t_2 \sin\alpha + \frac{gt_2^2}{2}.$$

Найдем из последней формулы t_2, решив квадратное уравнение, и, подставив t_2 в предыдущую формулу, определим расстояние S_2:

$$gt_2^2 + 2\upsilon_2 t_2 \sin\alpha - 2h = 0,$$

$$t_2 = \frac{\sqrt{(\upsilon_2 \sin\alpha)^2 + 2gh} - \upsilon_2 \sin\alpha}{g},$$

$$S_2 = \frac{\upsilon_2 \cos\alpha\left(\sqrt{\upsilon_2^2 \sin^2\alpha + 2gh} - \upsilon^2 \sin\alpha\right)}{g}.$$

Теперь, сложив S_1 и S_2, найдем искомое расстояние S:

$$S = \frac{2\upsilon_2^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} + \frac{\upsilon_2 \cos\alpha\left(\sqrt{\upsilon_2^2 \sin^2\alpha + 2gh} - \upsilon^2 \sin\alpha\right)}{g} =$$

$$= \frac{\upsilon_2 \cos\alpha(\upsilon_2 \sin\alpha + \sqrt{\upsilon_2^2 \sin^2\alpha + 2gh})}{g}.$$

$$S = 986\, м.$$

Выражения (3), (4) и (5) представляют собой решение этой задачи в общем виде.

$\upsilon_2 = 162\, м/с$, $\alpha = arctg 0{,}16 = 9^0$, $S = 986\, м$.

Задача 4. На неподвижной платформе установлено орудие, ствол которого направлен под углом 60^0 к горизонту. Масса платформы с орудием 15 т. На какое расстояние откатится платформа с орудием после выстрела, если масса вылетевшего снаряда 20 кг и вылетает он со скоростью 600 м/с? Коэффициент сопротивления движению платформы 0,1.

Дано	Решение
$m = 15000$ *кг* $\alpha = 60^0$ $m_1 = 20$ *кг* $\upsilon_1 = 600$ *м/с* $\mu = 0{,}1$ $S - ?$	После выстрела платформа с орудием вследствие отдачи приобретает начальную скорость υ_0 и будет двигаться равнозамедленно до остановки (конечная скорость $\upsilon = 0$).

При равнозамедленном движении:

$$\upsilon^2 - \upsilon_0^2 = -2aS,$$

следовательно, путь равен

$$S = \frac{\upsilon_0^2}{2a}. \qquad (1)$$

Скорость υ_0, с которой начнет откатываться платформа, найдем по закону сохранения импульса, согласно которому суммарный импульс платформы и снаряда сохраняется. Поэтому, если до выстрела, когда снаряд и платформа были неподвижны, их суммарный импульс был равен нулю, то он должен остаться равным нулю и после выстрела. Однако, этот закон справедлив только для замкнутых систем, а платформа со снарядом – система незамкнутая, поскольку на них действуют внешние силы (сила тяжести и сила реакции опоры). Но проекция этих сил на горизонтальную ось OX равна нулю.

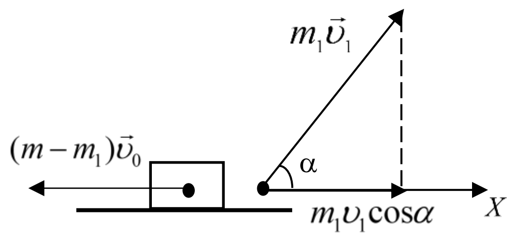


Рис. 4

По закону сохранения импульса в проекции на ось OX (рис. 4):

$$(m - m_1)\upsilon_0 = m_1\upsilon_1\cos\alpha,$$

$$\upsilon_0 = \frac{m_1\upsilon_1\cos\alpha}{m - m_1} \qquad (2)$$

Найдём ускорение, используя второй закон Ньютона (рис. 5):

$$(m - m_1)\vec{a} = (m - m_1)\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр}.$$

В проекции на оси OX и OY:

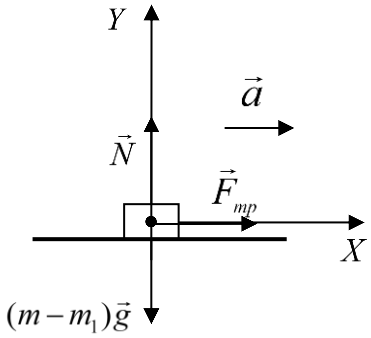


Рис. 5

$$OX: \ (m-m_1)a = F_{тр},$$

$$OY: \ (m-m_1)g = N.$$

Т.к. сила трения скольжения равна

$$F_{тр} = \mu N, \text{ то}$$

$$(m-m_1)a = (m-m_1)\mu g,$$

$$a = \mu g. \qquad (3)$$

Подставим (2) и (3) в (1),

$$S = \frac{1}{2\mu g}\left(\frac{m_1\upsilon_1\cos\alpha}{m-m_1}\right)^2, \quad S = 0{,}082\ м.$$

Задача 5. Два шара массами 2 кг и 3 кг движутся горизонтально навстречу друг другу со скоростями 8 м/с и 4 м/с и неупруго сталкиваются. Какое количество теплоты выделится при их столкновении?

Дано

$m_1 = 2\ кг$

$m_2 = 3\ кг$

$\upsilon_1 = 8\ м/с$

$\upsilon_2 = 4\ м/с$

$Q - ?$

Решение

Количество теплоты, которое выделится в результате столкновения шаров, равно изменению суммарной кинетической энергии этих шаров.

$$Q = E_1 - E_2.$$

До столкновения суммарная кинетическая энергия шаров была равна

$$E_1 = \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2}.$$

После столкновения, поскольку удар неупругий, шары стали двигаться в одном направлении и с одинаковой скоростью υ как одно тело, поэтому их общая кинетическая энергия станет равна

$$E_2 = \frac{(m_1+m_2)\upsilon^2}{2}.$$

В соответствии с законом сохранения импульса

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{\upsilon},$$

$$m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\upsilon.$$

Скорость шаров после столкновения станет равна

$$\upsilon = \frac{m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}.$$

Подставим это выражение в формулу для определения количества теплоты и выполним необходимые упрощения.

$$Q = \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)}{2} \cdot \frac{(m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{m_1 m_2 (\upsilon_1 + \upsilon_2)^2}{2(m_1 + m_2)}, \quad Q = 86{,}4\ \text{Дж}.$$

Задача 6. С какой скоростью двигался вагон массой 20 т, если при ударе о буфер пружина сжалась на 10 см? Известно, что под действием силы $9{,}8\cdot 10^3$ Н пружина сжимается на 1 см. Удар считать упругим.

Дано	Решение
$m = 2\cdot 10^4$ кг $x_1 = 0{,}1$ м $x_2 = 0{,}01$ м $F = 9{,}8\cdot 10^3$ Н $\upsilon - ?$	Поскольку удар упругий, применим для определения скорости вагона закон сохранения механической энергии, согласно которому кинетическая энергия движущегося со скоростью $\vec{\upsilon}$ вагона полностью превращается в потенциальную энергию упругой деформации пружины:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{kx_1^2}{2}. \tag{1}$$

Жесткость пружины k найдем по закону Гука,

$$\vec{F}_{упр} = -k\vec{x}_2.$$

По третьему закону Ньютона сила упругости, возникающая в пружине под воздействием внешней деформирующей силы F, равна по величине и направлена противоположно этой силе:

$$\vec{F}_{упр} = -\vec{F}.$$

Тогда

$$F = kx_2,$$

$$k = \frac{F}{x_2}. \tag{2}$$

Подставим (2) в (1):

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{Fx_1^2}{2x_2},$$

$$\upsilon = x_1\sqrt{\frac{F}{mx_2}}, \quad \upsilon = 0{,}7\ ^{м}/_{с}.$$

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Ускорение корабля на подводных крыльях меняется по закону $a = D + BS + CS^2$, где D, B, C – известные константы, а S – путь, пройденный кораблем. Масса корабля равна m. Найти работу по перемещению корабля на участке пути S_1.

($A = mS_1\left(D + \frac{BS_1}{2} + \frac{CS_1^2}{B}\right)$)

3.2. Автомобиль движется под действием постоянной силы тяги F. Уравнение движения $S = A + Bt - Ct^2$, где A, B, C – известные константы. Какую мощность разовьет двигатель в момент времени τ от начала движения?

($N = F(B - 2C\tau)$).

3.3. Скорость поезда, масса которого m, меняется по закону $\upsilon = D + Bt + Ct^2$, где D, B, C – известные константы. Определить работу силы тяги за время τ.

($A = m(B + 2C\tau)$)

3.4. Тело, массой m движется под действием постоянной силы прямолинейно, причем зависимость пути от времени определяется уравнением $S = C + Bt + Dt^2$, где D, B, C – известные константы. Найти работу этой силы за промежуток времени от 0 до τ.

($A = 2mD\left(C + D\tau + B\tau^2\right)$)

3.5. Автомобиль массой 2 т движется в гору. Уклон горы равен $h = 4\,м$ на каждые $\ell = 100\,м$ пути. Коэффициент сопротивления движению 0,08. Найти мощность двигателя, если известно, что $S = 3\,км$ пути автомобиль проходит за 4 мин, двигаясь равномерно.

($N = \dfrac{mgS}{t \cdot \ell}(h + k\sqrt{(\ell^2 - h^2)} = 2 \cdot 10^5\,Вт$)

3.6. Тягач, масса которого 15 т и мощность двигателя 375 кВт, поднимается в гору с углом уклона 30^0. Какую максимальную скорость может развивать тягач? Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

(Ответ: $\upsilon_{\max} = 5{,}1\,{}^{м}\!/_{с}$)

3.7. Мощный колесный тягач может двигаться вверх по малому подъему с максимальной скоростью 9 м/с, вниз по такому же уклону с максимальной скоростью 21 м/с. Какая будет его скорость при движении по горизонтальному пути, если мощность мотора и коэффициент трения во всех случаях одинаковы?

($\upsilon = \dfrac{2\upsilon_1\upsilon_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2} = 12{,}6\,{}^{м}\!/_{с}$)

3.8. У пружины динамометра коэффициент жесткости равен 10 Н/мм. Определить работу растяжения пружины при увеличении нагрузки от 5 Н до 8 Н и от 8 Н до 11 Н.

(1,95 мДж; 2,85 мДж)

3.9. С какой скоростью после горизонтального выстрела из пистолета стал двигаться стрелок, стоящий на гладком льду, если его масса 70 кг, масса пули 6,1 г и ее начальная скорость 300 м/с?

($\upsilon = 0{,}0261\,{}^{м}\!/_{с}$)

3.10. Два абсолютно неупругих шарика, сумма масс которых 12 кг, движутся навстречу друг другу со скоростями 4 м/с и 6 м/с. После центрального удара их общая скорость стала равна 2 м/с и сонаправлена со скоростью первого шара до удара. Определить потерю их кинетической энергии при ударе.

($\Delta E_к = \frac{m}{2}(\upsilon_2 + \upsilon)(\upsilon_1 - \upsilon) = 96$ *Дж*)

3.11. На железнодорожной платформе, движущейся равномерно со скоростью υ_1, укреплено орудие, ствол которого направлен в сторону движения платформы и приподнят над горизонтом на угол α. Орудие произвело выстрел, после чего скорость платформы уменьшилась в три раза. Найти скорость снаряда при вылете из ствола, если его масса m_2, а масса платформы с орудием m_1.

($\upsilon = \frac{2\upsilon_1 m_1}{3m_2 \cos\alpha}$)

3.12. Два одинаковых шара подвешены на нитях длиной 0,98 м и касаются друг друга. Один из шаров отклоняют на угол 60^0 и отпускают. Определить скорость второго шара сразу после соударения. Удар абсолютно упругий.

($\upsilon = \sqrt{2g\ell(1 - \cos\alpha)} = 3{,}1\, м/c$)

3.13. Конькобежец массой 70 кг, стоя на коньках на льду, бросает в горизонтальном направлении камень массой 3 кг со скоростью 8 м/с. На какое расстояние откатится при этом конькобежец, если коэффициент трения коньков о лед равен 0,02?

($S = \frac{1}{2kg}\left(\frac{m_2\upsilon_2}{m_1}\right)^2 = 0{,}3\, м$)

3.14. Два шарика массой m_1 и m_2 подвешены на нитях длиной ℓ так, что они соприкасаются друг с другом. Первый шарик отклоняют так, что он поднимается в гору на высоту h, а затем отпускают. На какой угол отклонятся шарики после неупругого удара?

($\alpha = \arccos\left(1 - \frac{hm_1^2}{\ell(m_1 + m_2)^2}\right)$)

3.15. Снаряд, летевший со скоростью 500 м/с, разорвался на два осколка массами 10 кг и 20 кг. Скорость большего осколка равна 800 м/с и совпадает по направлению со скоростью снаряда, направленной до разрыва горизонтально. Определить расстояние между точками падения обоих осколков, если снаряд разорвался на высоте 100 м.

($S = \frac{(m_1 + m_2)(\upsilon_2 - \upsilon_0)}{m_1} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = 3{,}7 \cdot 10^3\ м$)

3.16. Снаряд массой 10 кг обладал скоростью 200 м/с в верхней точке траектории. В этой точке он разорвался на две части. Меньшая часть массой 3кг получила скорость 400 м/с и полетела вверх под углом 90^0 к горизонту. Найти, с какой скоростью и в каком направлении полетит большая часть снаряда после его разрыва.

($\upsilon_2 = \frac{\sqrt{(m_1\upsilon_1)^2 + (m\upsilon)^2}}{m - m_1} = 333\ м/с$, $\alpha = arctg\frac{m_1\upsilon_1}{m\upsilon} = 31^0$)

3.17. Из жестко закрепленного автоматического оружия вылетает в горизонтальном направлении пуля массой m_1. Масса затвора m_2. Пуля вылетает со скоростью υ, при этом затвор отходит назад на расстояние x. Какова жесткость пружины затвора?

($k = \frac{1}{m_2}\left(\frac{m_1\upsilon}{x}\right)^2$)

3.18. Пуля массой 9,6 г, летевшая со скоростью 400 м/с, попала в стену и углубилась на 8 см. Определить силу сопротивления стены и время движения пули в стене, считая движение пули внутри стены равнозамедленным.

($F_{тр} = \frac{m\upsilon^2}{2S} = 9{,}6\ кН$, $t = \frac{2S}{\upsilon} = 0{,}4\ с$)

3.19. В груз массой 10 кг, подвешенный на нити длиной 4 м, попадает пуля массой 6,1 г, летевшая горизонтально со скоростью 300 м/с. На какой угол отклонится отвес?

(α=1,67^0)

3.20. Движущееся тело массой m_1 ударяется о неподвижное тело массой m_2. Считая удар неупругим и центральным, найти, какая часть первоначальной кинетической энергии переходит при ударе в тепло.

$$\left(\frac{Q}{E_к} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)$$

3.21. Вагон массой 40 т, движущийся со скоростью 2 м/с, в конце запасного пути ударяется о пружинный амортизатор. Какова будет деформация пружины, если ее жесткость $2{,}25 \cdot 10^5$ Н/м?

$$\left(x = \upsilon \sqrt{\frac{m}{k}} = 0{,}84 \, м \right)$$

4. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Момент инерции материальной точки относительно неподвижной оси вращения:

$$J = mr^2,\ [J] = 1\,кг\cdot м^2,$$

где m – масса материальной точки, r – расстояние до рассматриваемой оси вращения.

Момент инерции тела:

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 .$$

В случае непрерывного распределения массы эта сумма сводится к интегралу:

$$J = \int_m r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV,$$

где $dm = \rho dV$ – масса малого объема тела dV, ρ – плотность тела, r – расстояние от элемента dV до оси вращения.

Моменты инерции однородных тел правильной геометрической формы (ось вращения OO' проходит через центр масс тела) приводятся ниже.

1. Момент инерции обруча (толщиной стенок пренебрегаем) или полого цилиндра:

$$J = mR^2 .$$

2. Момент инерции диска или сплошного цилиндра радиуса R:

$$J = \frac{mR^2}{2} .$$

3. Момент инерции шара:

$$J = \frac{2}{5} mR^2 .$$

4. Момент инерции стержня длиной ℓ:

$$J = \frac{m\ell^2}{12} .$$

Если для тела известен момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс J_0, то момент инерции относительно любой оси, параллельной первой, находится по теореме Штейнера:

$$J = J_0 + md^2,$$

где d – расстояние от центра масс тела до оси вращения.

Момент силы относительно точки O:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{F}\right], \quad \left[M\right] = 1\,H \cdot м.$$

Модуль момента силы:

$$M = rF\sin\alpha = F\ell,$$

где ℓ – плечо силы относительно точки O, α – угол между направлениями $\vec{r}$ и $\vec{F}$.

Моментом силы относительно неподвижной оси *Z* называется проекция вектора $\vec{M}$ на эту ось (проходящую через точку O):

$$\vec{M}_Z = \left[\vec{r}\,\vec{F}\right]_Z.$$

Если на тело действуют несколько сил, то результирующий момент сил относительно неподвижной оси *Z* равен алгебраической сумме моментов всех сил относительно этой оси.

Момент импульса материальной точки $\vec{L}_i$ относительно неподвижной точки O:

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i\,\vec{p}_i] = [\vec{r}_i\,m_i\,\vec{\upsilon}_i].$$

Моментом импульса относительно неподвижной оси называется проекция вектора $\vec{L}_i$ на эту ось.

$$\vec{L}_i = J_i\vec{\omega},$$

где $J_i = m_i r_i^2$ – момент инерции материальной точки относительно оси вращения, $\vec{\omega}$ – угловая скорость.

Момент импульса твердого тела относительно неподвижной оси вращения:

$$\vec{L} = J\vec{\omega},$$

где J – его момент инерции относительно этой оси, $\vec{\omega}$ – угловая скорость.

Закон сохранения момента импульса: суммарный момент импульса замкнутой системы тел остается постоянным:

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{L}_i = const.$$

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad \text{или} \quad \vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{J},$$

где $\vec{M}$ – суммарный момент внешних сил, действующих на тело, J – его момент инерции относительно произвольной неподвижной оси вращения, $\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение.

Работа при вращательном движении:

$$A = \int_{0}^{\varphi} Md\varphi = M\varphi,$$

где φ – угол, на который поворачивается тело.

Кинетическая энергия при вращательном движении:

$$E_K = \frac{J\omega^2}{2},$$

где J – момент инерции тела; ω – его угловая скорость.

Примеры решения задач

Задача 1. Два однородных шара массами m_1 и m_2 закреплены на концах тонкого стержня массой m_3 и длиной ℓ (рис. 1). Радиус левого шара R_1, правого R_2. Определить момент инерции этой системы тел относительно оси вращения *mn*, отстоящей на расстоянии 1/3 длины ℓ от поверхности левого шара и перпендикулярной стержню.

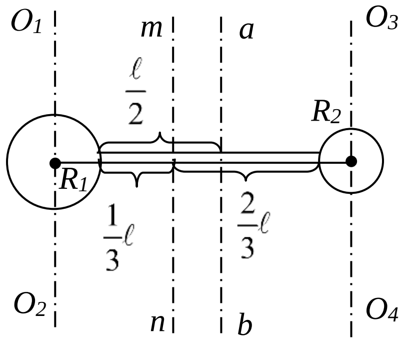
Дано	Решение
m_1, m_2, m_3 ℓ R_1, R_2 $J - ?$	

Рис. 1

Момент инерции – величина аддитивная, т.е. момент инерции системы тел равен сумме моментов инерции тел, составляющих систему. Поэтому момент инерции шаров и стержня относительно оси вращения равен сумме моментов инерции каждого шара и стержня относительно этой же оси:

$$J = J_1 + J_2 + J_3.$$

Момент инерции левого шара J_1 относительно оси mn по теореме Штейнера равен сумме момента инерции этого шара относительно оси O_1O_2, проходящей через его центр, и произведения массы этого шара m_1 на квадрат расстояния $R_1 + \frac{\ell}{3}$ от центра шара до оси вращения mn :

$$J_1 = \frac{2}{5}m_1R_1^2 + m_1\left(R_1 + \frac{\ell}{3}\right)^2.$$

Аналогично, момент инерции правого шара относительно оси вращения mn равен сумме момента инерции этого шара относительно оси O_3O_4, проходящей через его центр, и произведения массы этого шара на квадрат расстояния $R_2 + \frac{2\ell}{3}$ от его центра до оси вращения mn :

$$J_2 = \frac{2}{5}m_2R_2^2 + m_2\left(R_2 + \frac{2\ell}{3}\right)^2.$$

Наконец, момент инерции стержня относительно оси mn равен сумме момента инерции этого стержня $\frac{m_3\ell^2}{12}$ относительно оси ab, проходящей через его середину, и произведения массы этого стержня m_3 на квадрат расстояния между осями ab и mn, которое, как следует из чертежа, равно $\frac{\ell}{2}-\frac{\ell}{3}=\frac{\ell}{6}$:

$$J_3=\frac{m_3\ell^2}{12}+m_3\cdot\frac{\ell^2}{36}=\frac{m_3\ell^2}{9}.$$

Тогда момент инерции обоих шаров и стержня относительно оси mn равен

$$J=m_1\left(\frac{2}{5}R_1^2+\left(R_1+\frac{\ell}{3}\right)^2\right)+m_2\left(\frac{2}{5}R_2^2+\left(R_2+\frac{2\ell}{3}\right)^2\right)+\frac{m_3\ell^2}{9}.$$

Задача 2. Обруч массой 1 кг и радиусом 0,2 м вращается равномерно с частотой $3\,c^{-1}$ относительно оси, проходящей через середину его радиуса перпендикулярно плоскости обруча (рис. 2). Определить момент импульса обруча.

Дано

$m_1=1\,кг$

$R=0{,}2\,м$

$\nu=3c^{-1}$

$L-?$

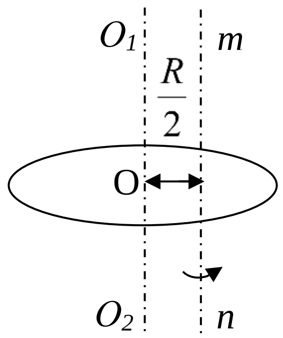


Рис. 2

Решение

Момент импульса твердого тела по определению равен произведению момента инерции этого тела и его угловой скорости:

$$L=J\omega.$$

Момент инерции обруча относительно оси mn по теореме Штейнера равен сумме момента инерции этого обруча mR^2 относительно оси O_1O_2, проходящей через его центр масс O, и произведения массы обруча на квадрат расстояния между осями mn и O_1O_2, которое, как следует из рис. 2, равно $\frac{R}{2}$:

$$J=mR^2+m\cdot\left(\frac{R}{2}\right)^2=1{,}25mR^2.$$

Угловая скорость ω обруча связана с его частотой вращения ν соотношением

$$\omega = 2\pi\nu .$$

Подставим выражения для момента инерции J и угловой скорости ω в формулу момента импульса:

$$L = 1{,}25mR^2 \cdot 2\pi\nu = 2{,}5\pi m\nu R^2 , \quad L = 0{,}942\,\frac{кг \cdot м^2}{с} .$$

Задача 3. Однородный диск радиусом 0,2 м и массой 5 кг под действием касательной силы F вращается вокруг оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости диска. Зависимость угла поворота диска от времени дается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2$, где $C = 2\,\frac{рад}{с^2}$, A и B – некоторые константы. Вращению диска противодействует тормозящий момент сил трения, равный 1 Н·м. Определить величину касательной силы, приложенный к ободу диска.

Дано

$m = 5\ кг$

$R = 0{,}2\ м$

$\varphi = A + Bt + Ct^2$

$C = 2\ рад/с^2$

$M_{тр} = 1\ Н \cdot м$

$F - ?$

Решение

Касательная сила F, приложенная к ободу диска, создает вращающий момент сил M, который равен произведению величины этой силы и ее плеча. плечом силы в нашем случае является радиус диска, поэтому

$$M = FR . \tag{1}$$

Вращающему моменту силы M противодействует момент сил трения. Согласно основному уравнению динамики вращательного движения

$$\vec{M} + \vec{M}_{тр} = J\vec{\varepsilon} .$$

Поскольку векторы моментов сил $\vec{M}$ и $\vec{M}_{тр}$ направлены противоположно, то в скалярной записи этот закон примет вид

$$M - M_{тр} = J\varepsilon . \tag{2}$$

Момент инерции диска определяется по формуле

$$J = \frac{mR^2}{2}. \tag{3}$$

Угловое ускорение диска найдем следующим образом:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct,$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2C. \tag{4}$$

Подставим правые части выражений (1), (3) и (4) в уравнение (2):

$$FR - M_{тр} = \frac{mR^2}{2} \cdot 2C,$$

$$F = \frac{mR^2C + M_{тр}}{R}, \quad F = 7\ H.$$

Задача 4. Маховое колесо, имеющее момент инерции 245 кг·м^2 вращается с частотой 20 с$^{-1}$. В некоторый момент времени на него стала действовать тормозящая сила, в результате чего колесо через минуту остановилось ($\nu = 0$). Радиус колеса 0,2 м. Найти величину тормозящего момента силы и число полных оборотов, сделанных колесом до остановки.

Дано

$J = 245\, кг \cdot м^2$

$\nu_0 = 20\, об/с$

$t = 60\, с$

$\nu = 0$

$R = 0{,}2\, м$

$M_{тр} - ?$

$N - ?$

Решение

Поскольку, кроме тормозящей силы, на колесо не действуют другие силы, создающие моменты сил, то согласно основному закону динамики вращательного движения

$$M_{тр} = J\varepsilon. \tag{1}$$

Так как колесо вращается под действием постоянного момента сил, его движение равнозамедленное, поэтому угловое ускорение (точнее, замедление) колеса найдем по известной формуле равнопеременного вращательного движения твердого тела:

$$\varepsilon = \frac{\omega_0 - \omega}{t}.$$

Здесь ω_0 – начальная угловая скорость колеса, а ω – его конечная угловая скорость. Эти величины связаны с известными частотами вращении ν_0 и ν простыми соотношениями:

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0, \quad \omega = 2\pi\nu.$$

Тогда

$$\varepsilon = \frac{2\pi\nu_0 - 2\pi\nu}{t} = \frac{2\pi\nu_0}{t}. \qquad (2)$$

Подставив полученное выражение (2) в формулу (1), найдем искомый тормозящий момент сил $M_{тр}$:

$$M_{тр} = \frac{2\pi\nu_0 J}{t}, \qquad M_{тр} = 513\, H \cdot м.$$

Полное число оборотов колеса можно определить, умножив его среднюю частоту вращения $\nu_{ср}$, т.е. среднее число оборотов за единицу времени, на все время вращения:

$$N = \nu_{ср} \cdot t.$$

Средняя частота вращения колеса есть среднее арифметическое начальной и конечной частот вращения, что справедливо только при равнопеременном вращении твердого тела:

$$\nu_{ср} = \frac{\nu_0 + \nu}{2} = \frac{\nu_0}{2}.$$

Тогда

$$N = \frac{\nu_0 t}{2}, \qquad N = 600 \; об.$$

Задача 5. На барабан радиусом 0,2 м, момент инерции которого 0,1 кг·м^2, намотан шнур, к которому привязан груз массой 0,5 кг. До начала вращения высота груза над полом 1 м. Найти кинетическую энергию груза в момент удара о пол. Движение груза считать равноускоренным (рис. 3).

Дано

$J = 0{,}1\ кг \cdot м^2$

$m = 0{,}5 кг$

$h = 1 м$

$\upsilon_0 = 0$

$R = 0{,}2\ м$

$E_к - ?$

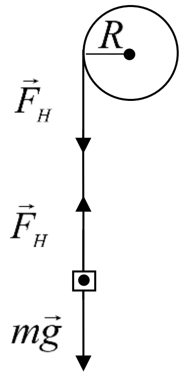


Рис. 3

Решение

Кинетическая энергия груза в момент его удара о пол определяется формулой

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2}, \qquad (1)$$

где υ – конечная скорость груза (в момент удара о пол). Для определения квадрата конечной скорости можно воспользоваться формулой кинематики равноускоренного движения:

$$\upsilon^2 - \upsilon_0^2 = 2ah, \quad \upsilon^2 = 2ah. \qquad (2)$$

Запишем 2-й закон Ньютона для поступательно движущегося груза и вращающегося барабана сначала в векторной. а затем в скалярной формах и из системы полученных уравнений найдем ускорение a.

$$\begin{cases} \vec{M} = J\vec{\varepsilon}, \\ m\vec{g} + \vec{F}_H = m\vec{a}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} M = J\varepsilon, \\ mg - F_H = ma. \end{cases}$$

Для точек обода барабана

$$a = a_\tau = \varepsilon R, \ \varepsilon = \frac{a}{R}.$$

Поскольку $M = F_H R$,
$$\begin{cases} F_H \cdot R = J \cdot \dfrac{a}{R} & (3) \\ mg - F_H = ma & (4) \end{cases}$$

Выразим F_H из уравнения (3)

$$F_H = \frac{Ja}{R^2},$$

и подставим в уравнение (4):

$$mg - \frac{Ja}{R^2} = ma\ ,$$

$$a = \frac{mgR^2}{J + mR^2}\ .$$

Подставим полученное выражение в формулу (2), а затем то, что получится после этой подстановки, – в выражение (1):

$$\upsilon^2 = \frac{2mgR^2h}{J + mR^2}\ ,$$

$$E_к = \frac{m^2gR^2h}{J + mR^2}\ , \quad E_к = 0{,}82\ Дж\ .$$

Задача 6. Блок с моментом инерции J укреплен на вершине наклонной плоскости. Гири массами m_1 и m_2 соединены нитью, перекинутой через блок. Угол при основании наклонной плоскости α. Определить натяжение нитей, если гиря массой m_2 опускается равноускоренно. Блок представляет собой однородный цилиндр радиусом R. Трением пренебречь.

Решение

Дано

J

m_1, m_2

α

R

$F_{Н1} - ?$

$F_{Н2} - ?$

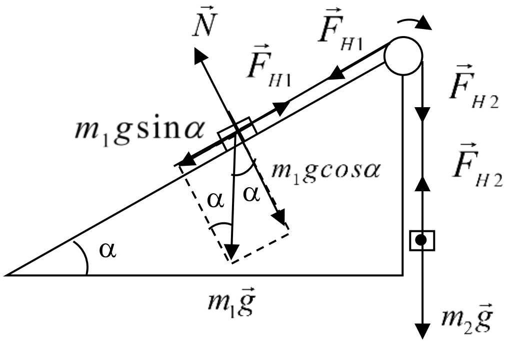


Рис. 4

Для решения этой задачи необходимо записать основное уравнение динамики (второй закон Ньютона) применительно к поступательному движению грузов и основное уравнение динамики вращательного движения блока (рис. 4).

В векторной записи эти уравнения будут иметь вид

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{F}_{H1} + \vec{N} = m_1\vec{a}, \\ m_2\vec{g} + \vec{F}_{H2} = m_2\vec{a}, \\ \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = J\vec{\varepsilon}, \end{cases}$$

а в скалярной

$$\begin{cases} F_{H1} - m_1 g \sin\alpha = m_1 a, & (1) \\ m_2 g - F_{H2} = m_2 a, & (2) \\ M_2 - M_1 = J\varepsilon. & (3) \end{cases}$$

Плечом сил F_{H1} и F_{H2} является радиус блока R. По определению момента силы:

$$M_1 = F_{H1}R, \tag{4}$$

$$M_2 = F_{H2}R. \tag{5}$$

Ускорение $\vec{a}$ равно тангенциальному ускорению точек обода блока, поэтому оно связано с угловым ускорением блока ε соотношением

$$a = a_\tau = \varepsilon R, \ \varepsilon = \frac{a}{R}. \tag{6}$$

Подставив (4), (5) и (6) в уравнение (3),

$$F_{H2} \cdot R - F_{H1} \cdot R = J\frac{a}{R},$$

$$F_{H2} - F_{H1} = \frac{Ja}{R^2}, \tag{7}$$

а выражение (7) вместо (3) в систему уравнений, сложим их и найдем ускорение a.

$$\begin{cases} F_{H1} - m_1 g \sin\alpha = m_1 a \\ m_2 g - F_{H2} = m_2 a \\ F_{H2} - F_{H1} = \dfrac{J}{R^2} a \end{cases},$$

$$m_2 g - m_1 g \sin\alpha = a\left(m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}\right),$$

$$a = \frac{\left(m_2 - m_1 \sin\alpha\right) g R^2}{\left(m_1 + m_2\right) R^2 + J}.$$

Зная a, из уравнений (1) и (2) находим F_{H1} и F_{H2}.

$$F_{H1} = m_1\left(a + g\sin\alpha\right) = m_1 g\left(\frac{\left(m_2 - m_1\sin\alpha\right)R^2}{\left(m_1 + m_2\right)R^2 + J} + \sin\alpha\right) =$$

$$= \frac{m_1 g(m_2 R^2(1+\sin\alpha) + J\sin\alpha)}{(m_1 + m_2)R^2 + J}.$$

$$F_{H2} = m_2(g - a) = \frac{m_2 g(m_1 R^2(1+\sin\alpha) + J)}{(m_1 + m_2)R^2 + J}.$$

Задача 7. Какую работу надо совершить в течении 1 мин, чтобы увеличить частоту вращения маховика массой 50 кг, имеющего форму диска диаметром 1,5 м от 0 до 50 с$^{-1}$, если к ободу маховика приложена по касательной постоянная сила трения 1 Н?

Дано

$t = 60\,с$

$m = 50\,кг$

$D = 1{,}5\,м$

$v_0 = 0$

$v = 50 c^{-1}$

$F_{тр} = 1\,H$

$A - ?$

Решение

Работа при вращательном движении твердого тела определяется произведением вращающего момента силы M и угла поворота φ этого тела за некоторое время

$$A = M\varphi. \qquad (1)$$

Для определения вращающего момента силы M воспользуемся основным уравнением динамики вращательного движения твердого тела, которое применительно к данной задаче имеет вид в векторной записи

$$\vec{M} + \vec{M}_{тр} = J\vec{\varepsilon},$$

а в скалярной

$$M - M_{тр} = J\varepsilon,$$

$$M = M_{тр} + J\varepsilon\,. \qquad (2)$$

Момент инерции однородного диска относительно оси вращения, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости диска, определяется формулой

$$J = \frac{mR^2}{2} = \frac{mD^2}{8}\,.$$

Момент сил трения равен произведению силы трения на ее плечо:

$$M_{тр} = F_{тр} \cdot R = F_{тр} \cdot \frac{D}{2}\,.$$

Подставив выражения для J и $M_{тр}$ в (2), получим

$$M = \frac{mD^2}{8}\varepsilon + F_{тр} \cdot \frac{D}{2}\,. \qquad (3)$$

Поскольку, по условию задачи величины сил, действующих на маховик, и их плечи не менялись, то его вращение равноускоренное,

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{2\pi\nu - 2\pi\nu_0}{t} = \frac{2\pi\nu}{t}\,, \qquad (4)$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{2\pi\nu}{t} \cdot \frac{t^2}{2} = \pi\nu t\,. \qquad (5)$$

Подставим выражение (4) в (3):

$$M = \frac{mD^2}{8} \cdot \frac{2\pi\nu}{t} + \frac{F_{тр} \cdot D}{2} = \frac{D(\pi m\nu D + 2F_{тр}t)}{4t}\,, \qquad (6)$$

а затем (5) и (6) в формулу (1):

$$A = \frac{D(\pi m\nu D + 2F_{тр}t)}{4t} \cdot \pi\nu t = \frac{\pi\nu D(\pi m\nu D + 2F_{тр}t)}{4}\,, \qquad A = 7 \cdot 10^5\ Дж\,.$$

Задача 8. Мальчик запустил обруч массой 0,5 кг вверх по наклонной плоскости со скоростью 2 м/с, при этом обруч вкатился на расстояние 3 м за счет его кинетической энергии. Уклон горки составлял 10 м на каждые 100 м пути. На сколько при этом увеличилась внутренняя энергия системы тел? Радиус обруча 0,5 м.

Дано

$\upsilon = 2\, м/с$

$m = 0{,}5\, кг$

$S = 3\, м$

$H = 10\, м$

$\ell = 100\, м$

$R = 0{,}5\, м$

$\Delta E - ?$

Решение

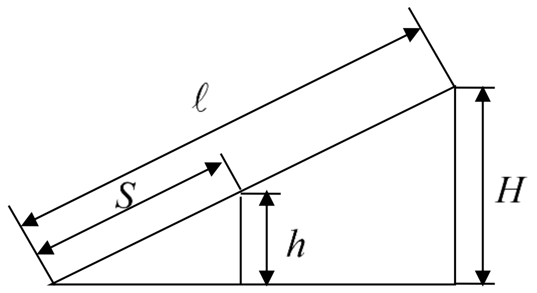


Рис. 5

По закону сохранения энергии увеличение внутренней энергии равно уменьшению механической энергии обруча.

У основания горки обруч обладал кинетической энергией поступательного движения $E_{кп}$ и кинетической энергией вращательного движения $E_{кв}$. Когда обруч поднялся на некоторую высоту h, вкатившись при этом на расстояние S, часть его кинетической энергии превратилась в потенциальную энергию E_p, а часть пошла на увеличение внутренней энергии под действием сил трения (т.е. превратилась в тепловую энергию).

$$\Delta E = E_{кп} + E_{кв} - E_p = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} - mgh\,. \qquad (1)$$

Из теории известно, что момент инерции обруча определяется формулой

$$J = mR^2\,. \qquad (2)$$

Линейная скорость точек обруча равна скорости его поступательного движения υ и связана с угловой скоростью обруча ω соотношением

$$\upsilon = \omega R, \text{ откуда } \omega = \frac{\upsilon}{R}\,. \qquad (3)$$

Высоту h, на которую поднялся обруч, можно найти из подобия двух прямоугольных треугольников с гипотенузами S и ℓ и катетами h и H (рис. 5). Из их подобия следует, что

$$h = \frac{SH}{\ell} \qquad (4)$$

Подставим выражения (2), (3) и (4) в уравнение (1):

$$\Delta E = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{mR^2\upsilon^2}{2R^2} - mg \cdot \frac{SH}{\ell} = m\left(\upsilon^2 - \frac{gSH}{\ell}\right), \qquad \Delta E = 0{,}53\ Дж.$$

Задача 9. Горизонтальная платформа массой m_1 вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, с частотой ν_0. Человек массой m_2 стоит на ее краю. С какой частотой станет вращаться платформа, если человек перейдет в ее центр? Считать платформу круглым однородным диском, а человека – материальной точкой.

Дано

m_1, m_2

ν_0

$\nu - ?$

Решение

По закону сохранения момента импульса суммарный импульс платформы L_{01} и человека L_{02}, когда он стоял на ее краю, должен сохраниться, т.е. должен быть равным суммарному моменту импульса платформы L_1 и человека L_2 после того, как человек перешел в центр платформы

$$\vec{L}_{01} + \vec{L}_{02} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 . \qquad (1)$$

По определению момент импульса вращающегося тела равен произведению момента инерции тела и его угловой скорости, поэтому

$$\vec{L}_{01} + \vec{L}_{02} = J_{01}\vec{\omega}_0 + J_{02}\vec{\omega}_0 = (J_{01} + J_{02})\vec{\omega}_0 \qquad (2)$$

и

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = J_1\vec{\omega} + J_2\vec{\omega} = (J_1 + J_2)\vec{\omega} . \qquad (3)$$

Здесь ω_0 – угловая скорость платформы и человека, когда он стоял на ее краю, а ω – угловая скорость платформы и человека, когда он перешел в центр.

Момент инерции платформы как однородного диска равен

$$J_{01} = \frac{m_1 R^2}{2} .$$

Очевидно, что момент инерции платформы после того, как человек перейдет в ее центр, не изменится, поскольку при этом не изменятся ни ее масса, ни радиус,

$$J_{01} = J_1 .$$

Момент инерции человека, стоящего на краю платформы, определим по формуле момента инерции материальной точки

$$J_{02} = m_2 R^2 .$$

Когда человек перейдет в центр, то расстояние от него до центра платформы станет равно нулю, поэтому и момент инерции человека в центре платформы J_2 равен нулю.

Тогда уравнение (1) примет вид:

$$\left(\frac{m_1 R^2}{2} + m_2 R^2 \right) \omega_0 = \frac{m_1 R^2}{2} \omega ,$$

$$\omega_0 = 2\pi \nu_0, \quad \omega = 2\pi \nu,$$

$$\left(0{,}5 m_1 R^2 + m_2 R^2 \right) \cdot 2\pi\nu_0 = 0{,}5 m_1 R^2 \cdot 2\pi\nu ,$$

$$\left(0{,}5 m_1 + m_2 \right) \nu_0 = 0{,}5 m_1 \nu ,$$

$$\nu = \frac{\nu_0 \left(0{,}5 m_1 + m_2 \right)}{0{,}5 m_1} .$$

Задачи для самостоятельного решения

4.1. Шар радиусом 5 см и массой 1 кг закреплен на одном конце тонкого однородного стержня массой 300 г и длиной 0,5 м. Стержень с шаром вращаются вокруг оси, проходящей через другой конец стержня перпендикулярно ему с угловой скоростью 2 рад/с. Найти момент инерции стержня с шаром относительно этой оси и момент их импульса.

($J = m_1 R (1{,}4R + 2\ell) + \ell^2 (m_1 + m_2 / 3) = 0{,}33 кг \cdot м^2$, $L = J\omega = 0{,}66 \frac{кг \cdot м^2}{с}$).

4.2. Какую постоянную силу надо приложить по касательной к сечению вала радиусом 6 см, на котором жестко закреплен маховик, имеющий форму диска радиусом 60 см, чтобы увеличить частоту вращения системы за одну минуту от 2 с$^{-1}$ до 4 с$^{-1}$? Масса маховика 150 кг, вала 5 кг.

($F = 94{,}3 H$).

4.3. Масса диска 0,5 кг, его диаметр 40 см. Диск вращается с частотой 25 с$^{-1}$. При торможении он останавливается через 20 с. Определить тормозящий момент, считая его постоянным.

($M_{тр} = 0{,}0785\, Н \cdot м$).

4.4. На барабан массой $m_1 = 9\, кг$ намотан шнур, к концу которого привязан груз массой $m_2 = 2\, кг$. Найти натяжение нити. Барабан считать однородным цилиндром, трением пренебречь.

($F_Н = \dfrac{m_1 m_2 g}{2m_2 + m_1} = 13{,}8 H$).

4.5. На барабан радиусом 0,5 м намотан шнур, к концу которого привязан груз массой 10 кг. Найти массу барабана, если известно, что груз опускается с ускорением 2 м/с. Барабан считать однородным диском. Трением пренебречь.

($m_2 = 2m_1\left(\dfrac{g}{a} - 1\right) = 78\, кг$).

4.6. На барабан массой $m_1 = 0{,}5\, кг$ намотан шнур, к которому привязан груз массой $m_2 = 0{,}2\, кг$. До начала вращения барабана высота груза над полом 2 м. Найти, через сколько времени груз опустится до пола. Барабан считать однородным диском, трением пренебречь.

($t = \sqrt{\dfrac{h(2m_2 + m_1)}{g m_2}} = 0{,}96\, с$).

4.7. Маховик, момент инерции которого равен 63,6 кг·м^2, вращается с постоянной угловой скоростью 31,4 рад/с. Найти момент сил трения $M_{тр}$, под действием которых маховик останавливается через 20 с.

($M_{тр} = \dfrac{J\omega}{t} = 100\, Н \cdot м$).

4.8. Маховое колесо, имеющее момент инерции 245 кг·м^2, вращается, делая 20 об/с. После того, как на колесо перестал действовать вращающий момент сил, оно остановилось, сделав 1000 оборотов. Найти момент сил трения $M_{тр}$ и время, прошедшее от момента прекращения действия вращающего момента сил до полной остановки колеса.

($M_{тр} = \dfrac{2\pi \nu_0 J}{t} = 308 Н \cdot м,\ t = \dfrac{2N}{\nu_0} = 100 с$).

4.9. Однородный диск радиусом 0,2 м и массой 5 кг вращается вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости диска. Зависимость угловой скорости вращения диска от времени дается уравнением $\omega = A + Bt$, где $B = 8 рад/с^2$. Найти величину вращающей силы. приложенной касательно к ободу диска.

($F = 0{,}5mRB = 4 Н$).

4.10. Шар массой 10 кг и радиусом 20 см вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Уравнение вращения шара имеет вид $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$, где $A = 5 рад$, $B = 4 рад/с^2$, $C = 1 рад/с^3$. Найти вращательный момент сил, действующих на шар в момент времени $\tau = 2с$.

($M = 0{,}8mR^2(B + 3C\tau) = 3{,}2 Н \cdot м$).

4.11. Блок массой 1 кг укреплен на конце стола. Гири равной массы по 2 кг соединены нитью, перекинутой через блок. Коэффициент трения гири о поверхность стола 0,1. Блок считать однородным диском. Найти ускорение, с которым движутся гири.

($a = \dfrac{g(m_2 - km_1)}{0{,}5m + m_1 + m_2} = 3{,}9 \dfrac{м}{с^2}$).

4.12. Две гири массами $m_1 = 2 кг$ и $m_2 = 1 кг$ соединены нитью, перекинутой через блок массой $m = 1 кг$. Найти ускорение, с которым движутся гири, и силы натяжения нитей. Блок считать однородным диском, временим пренебречь.

($a = \dfrac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2 + 0{,}5m} = 2{,}8 \dfrac{м}{с^2},\ F_{H1} = m_1(g - a) = 14 Н,\ F_{H2} = m_2(g + a) = 12{,}6 Н$).

4.13. Две гири разной массы соединены нитью, перекинутой через блок, момент инерции которого 50 кг·м^2, а радиус 20 см. Блок вращается с трением и момент сил трения 98,1 Н·м. Найти разность сил натяжения по обе стороны блока, если известно, что он вращается с постоянным угловым ускорением 2,36 рад/с^2.

($\Delta F_H = \dfrac{J\varepsilon + M_{тр}}{R} = 1081 H$).

4.14. Медный шар ($\rho = 8{,}9 \cdot 10\, кг / м^3$) радиусом 10 см вращается с частотой 2 с$^{-1}$ вокруг оси, проходящей через его центр. Какую работу надо совершить, чтобы увеличить его угловую скорость вдвое?

($A = 3{,}2\pi^3 \nu_0^2 \rho R^5 = 35\,Дж$).

4.15. Какую работу надо совершить, чтобы увеличить частоту вращения маховика массой 500 кг, имеющего форму диска диаметром 1,5 м, от 0 до 50 с$^{-1}$? Трением пренебречь.

($A = 6940\,Дж$).

4.16. Определить кинетическую энергию при качении без скольжения со скоростью υ по горизонтальной поверхности: а) однородного цилиндра массой m; б) однородного шара массой m.

($а)\ E_к = 0{,}75 m\upsilon^2,\ б)\ E_к = 0{,}7 m\upsilon^2$).

4.17. По горизонтальной поверхности катится со скоростью υ тележка общей массой m, имеющая четыре колеса в виде дисков массой $m/8$ каждое. Найти ее кинетическую энергию.

($E_к = 0{,}625 m\upsilon^2$).

4.18. Маховое колесо начинает вращаться с постоянным угловым ускорением 0,5 рад/с^2 и через 15 с после начала движения приобретает момент импульса 73,5 кг·м^2/с. Найти кинетическую энергию колеса через 20 с после начала вращения.

($E_к = \dfrac{\varepsilon L t_2^2}{2t_1} = 490\,Дж$).

4.19. Шар массой 1 кг, катящийся без скольжения, неупруго ударяется о стенку и откатывается от нее. Скорость шара до удара о стенку 10 см/с, после удара 8 см/с. Найти количество теплоты, выделившееся при ударе.

($Q = 0{,}7m(\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2) = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ *Дж*).

4.20. Стержень массой 1 кг и длиной 40 см может вращаться вокруг оси, проходящей через его середину перпендикулярно стержню. В конец стержня попадает пуля массой 10 г, летящая перпендикулярно к оси и к стержню со скоростью 200 м/с. Определить угловую скорость, которую получит стержень с пулей, если она застрянет в нем.

($\omega = \dfrac{6m_n\upsilon}{\ell(m_c + 3m_n)} = 29\dfrac{рад}{с}$).

4.21. Пуля, выпущенная из нарезного оружия, летит со скоростью υ и одновременно вращается вокруг своей оси с частотой ν. Определить кинетическую энергию пули. Масса пули m, ее диаметр D. Пулю считать однородным цилиндром.

($E_к = 0{,}5m\left(\upsilon^2 + \pi^2\nu^2D^2\right)$).

4.22. Тонкий прямой стержень длиной 1 м прикреплен к горизонтальной оси, проходящей через его конец, и может вращаться вокруг этой оси в вертикальной плоскости. Стержень покоится в вертикальном положении. Затем его отклоняют от вертикали на угол $\alpha = 60^0$ и отпускают. Определить линейную скорость нижнего конца стержня в момент прохождения им начального равновесия.

($\upsilon = \sqrt{3g\ell(1 - \cos\alpha)} = 3{,}8\dfrac{м}{с}$).

4.23. Кинетическая энергия диска, вращающаяся с частотой 2 с$^{-1}$ вокруг оси, лежащей в плоскости диска и проходящей через его центр, равна 60 Дж. Найти момент импульса этого диска.

($L = \dfrac{E_к}{\pi\nu} = 96\dfrac{кг \cdot м^2}{с}$).

4.24. Мальчик катит обруч по горизонтальной дороге со скоростью 7,2 км/час. На какое расстояние может вкатиться обруч на горку за счет его кинетической энергии, если уклон горки составляет 10 м на каждые 100 м пути?

($S = 4{,}1 м$).

4.25. Обруч и диск одинаковой массы катятся без скольжения с одинаковой линейной скоростью. Кинетическая энергия обруча E_1. Найти кинетическую энергию диска.

($E_2 = \frac{3}{4}E_1$).

4.26. Во сколько раз кинетическая энергия обруча больше кинетической энергии диска, если их массы одинаковы, и они катятся с одинаковой линейной скоростью?

($в\ 1{,}33\ раза$).

4.27. Человек массой m_1 находится на краю неподвижной платформы массой m_2 и радиусом R, представляющей собой однородный диск, способный вращаться вокруг оси, проходящей через центр платформы перпендикулярно ее плоскости. С какой скоростью относительно платформы должен идти человек по краю платформы, чтобы она стала вращаться с частотой ν?

($\upsilon = \frac{\pi \nu R(2m_1 + m_2)}{m_1}$).

4.28. Горизонтальная платформа массой 80 кг и радиусом 1 м вращается с частотой 20 об/мин. В центре платформы стоит человек и держит в расставленных руках гири. С какой частотой будет вращаться платформа, если человек опустит руки, уменьшив при этом свой момент инерции от 2,94 кг·м^2 до 0,98 кг·м^2?

($\nu_2 = \nu_1 \cdot \frac{mR^2 + 2J_1}{mR^2 + 2J_2} = 0{,}35\, c^{-1}$).

4.29. Человек массой 60 кг находится на неподвижной платформе массой 100 кг. С какой частотой станет вращаться платформа, если человек будет двигаться по окружности, радиусом 5 м вокруг оси вращения, проходящей через центр платформы перпендикулярно ее плоскости? Скорость движения человека относительно платформы 4 км/ч. Радиус платформы 10 м. Платформу считать однородным диском, а человека – материальной точкой.

($\nu = \dfrac{m_1 \upsilon R_1}{\pi(m_2 R_2^2 + 2m_1 R_1^2)} = 0{,}0082\, c^{-1}$).

4.30. Горизонтальная платформа массой 100 кг и радиусом 1,5 м вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр платформы, делая 10 об/мин. Какую работу совершит человек массой 60 кг при переходе от края платформы к ее центру? Платформу считать однородным диском.

($A = 162\, Дж$).

4.31. Человек массой m_1 стоит в центре горизонтальной платформы массой m_2, имеющей форму диска и вращающейся с угловой скоростью ω_1. С какой угловой скоростью станет вращаться платформа, если человек перейдет из центра к краю платформы?

($\omega_2 = \dfrac{m_2 \omega_1}{m_2 + 2m_1}$).

5. ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ

При работе гидравлического пресса создаётся выигрыш в силе, равный отношению площади большего поршня к площади меньшего,

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{S_2}{S_1}.$$

Уравнение неразрывности струи или теорема Эйлера: произведение скорости течения несжимаемой жидкости и площади поперечного сечения одной и той же трубки тока постоянно,

$$\upsilon S = const.$$

Уравнение Бернулли:

$$\frac{\rho\upsilon^2}{2} + \rho g h + p = const,$$

где ρ – плотность жидкости, υ – скорость потока, g – ускорение свободного падения, h – высота, p – давление.

Сила вязкого трения для тел сферической формы (формула Стокса):

$$F_{тр} = 6\pi\eta r\upsilon,$$

где η – коэффициент динамической вязкости, υ – скорость движения тела в вязкой жидкости, r – радиус сферического тела.

Примеры решения задач

Задача 1. Давление, производимое на малый поршень гидравлического пресса, осуществляется с помощью рычага, соотношение плеч которого $\frac{h_1}{h_2} = 10$ (рис. 1). Груз какой массы можно поднять на большом поршне, если к плечу h_1 приложена сила 100 Н? Отношение площадей поршней пресса $\frac{S_1}{S_2} = 0{,}02$, КПД пресса 0,75.

Дано

$\frac{h_1}{h_2} = 10$

$\frac{S_1}{S_2} = 0{,}02$

$F = 100\ H$

$\eta = 0,75$

$m - ?$

Решение

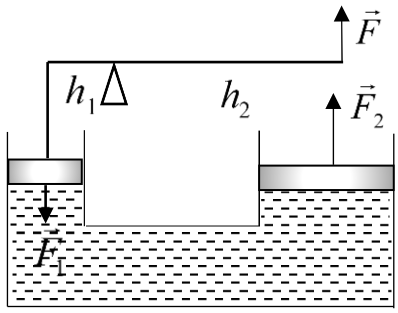


Рис.1

Согласно формуле гидравлического пресса

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{S_2}{S_1}, \quad \Rightarrow F_2 = \frac{F_1 S_2}{S_1}. \tag{1}$$

Рычаг даёт выигрыш в силе во столько раз, во сколько его длинное плечо больше короткого:

$$\frac{F}{F_1} = \frac{h_2}{h_1}, \quad \Rightarrow F_1 = \frac{F h_1}{h_2}. \tag{2}$$

Подставим (2) в (1),

$$F_2 = \frac{F h_1}{h_2} \cdot \frac{S_2}{S_1}.$$

Согласно определению КПД:

$$\eta = \frac{A_{пол}}{A_{затр}}. \tag{3}$$

Полезная работа

$$A_{пол} = \Delta E_p = mgH, \tag{4}$$

затраченная работа

$$A_{затр} = F_2 H, \tag{5}$$

где H – высота подъёма поршня.

Подставим (4) и (5) в (3),

$$\eta = \frac{mgH}{F_2 H} = \frac{mg}{F_2},$$

$$m = \frac{\eta F_2}{g} = \frac{\eta F\, h_1 S_2}{g h_2 S_1}, \quad m = 3750 \text{ кг}.$$

Задача 2. Цилиндрический бак высотой 1 м и площадью поперечного сечения 2 м^2 наполнен до краев водой (рис. 2). За какое время вся вода выльется через отверстие площадью поперечного сечения 2 см^2, расположенное на дне бака?

Дано

$h = 1 м$

$S_1 = 2 м^2$

$S_2 = 2 \cdot 10^{-4} м^2$

$t - ?$

Решение

Уровень воды в баке всё время понижается. За время dt уровень воды в баке понизится на dh:

$$dh = \upsilon_1 dt, \quad dt = \frac{dh}{\upsilon_1},$$

где $\vec{\upsilon}_1$ – скорость понижения уровня воды в баке.

Время, за которое выльется вся вода:

$$t = \int_0^h \frac{dh}{\upsilon_1}. \tag{1}$$

Найдём скорость $\vec{\upsilon}_1$, используя теорему Бернулли:

$$\frac{\rho \upsilon_1^2}{2} + \rho g h + p_0 = \frac{\rho \upsilon_2^2}{2} + p_0,$$

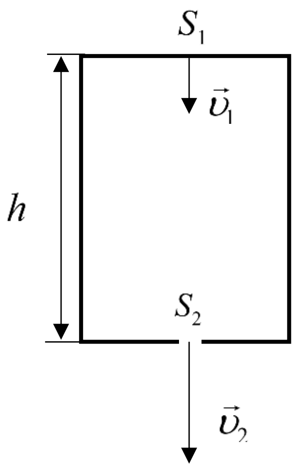


Рис.2

где ρ – плотность воды, p_0 – атмосферное давление, $\vec{\upsilon}_2$ – скорость вытекания воды из отверстия.

$$\frac{\upsilon_1^2}{2} + gh = \frac{\upsilon_2^2}{2},$$

$$\upsilon_1^2 + 2gh = \upsilon_2^2. \tag{2}$$

В силу неразрывности струи

$$\upsilon_1 S_1 = \upsilon_2 S_2,$$

$$\upsilon_2 = \frac{\upsilon_1 S_1}{S_2}. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (2), получим

$$\upsilon_1^2 + 2gh = \left(\frac{\upsilon_1 S_1}{S_2}\right)^2,$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1}}. \qquad (4)$$

Подставим (4) в (1)

$$t = \sqrt{\frac{\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1}{2g}} \int_0^h \frac{dh}{\sqrt{h}} = \sqrt{\frac{2h\left(\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right)}{g}}, \quad t = 180,7\ c$$

Задача 3. В бак за одну секунду вливается объём $2 \cdot 10^{-4}\ м^3$. Какова должна быть площадь отверстия в дне бака, чтобы вода в нём оставалась на постоянном уровне $h = 1\ м$?

Дано

$\frac{V}{t} = 2 \cdot 10^{-4}\ м^3/с$

$h = 1\ м$

$S_2 - ?$

Решение

По закону сохранения энергии кинетическая энергия воды, вытекающей из отверстия в дне бака, равна потенциальной энергия водяного столба над отверстием:

$$E_к = E_p,$$

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} = mgh.$$

Отсюда скорость вытекания воды из отверстия

$$\upsilon_2 = \sqrt{2gh}. \qquad (1)$$

Чтобы вода оставалась на одном уровне, необходимо, чтобы в бак за одну секунду вливался и выливался одинаковый объём воды:

$$\frac{V}{t} = S_2\upsilon_2, \quad \Rightarrow \quad \upsilon_2 = \frac{V}{S_2 t} \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), получим:

$$S_2 = \frac{V}{t\sqrt{2gh}}, \qquad S_2 = 0{,}45\cdot 10^{-4}\ м^2 .$$

Задача 4. Цилиндрический сосуд высотой $h = 2\ м$ и площадью поперечного сечения $S_1 = 1\ м^2$, полностью заполненный жидкостью, имеет малое боковое отверстие площадью поперечного сечения $S_2 = 2\cdot 10^{-4}\ м^2$, находящееся на высоте $h_1 = 30\ см$ от уровня дна (рис. 3). Найти максимальное расстояние, на которое падает струя на пол.

Дано

$h = 2\ м$

$S_1 = 1\ м^2$

$S_2 = 2\cdot 10^{-4}\ м^2$

$h_1 = 30\ см$

$\ell - ?$

Решение

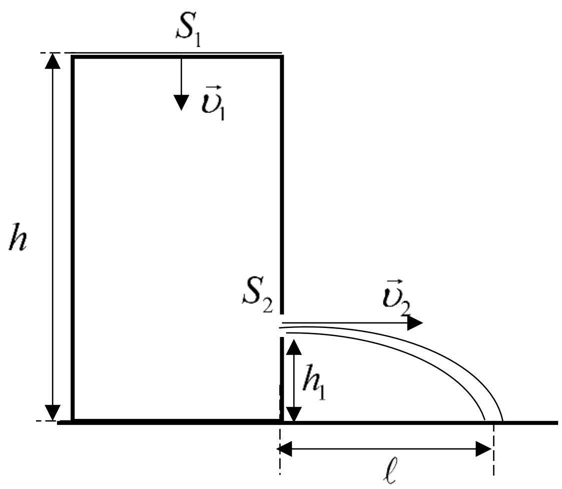


Рис. 3

Максимальное расстояние, на которое падает струя на пол

$$\ell = \upsilon_2 t ,$$

где t – время, за которое струя падает с высоты h_1 на пол.

Найдём скорость вытекания воды из отверстия $\vec{\upsilon}_2$, используя уравнение Бернулли:

$$\frac{\rho\upsilon_1^2}{2} + \rho g\left(h - h_1\right) + p_0 = \frac{\rho\upsilon_2^2}{2} + p_0 ,$$

$$\frac{\upsilon_1^2}{2} + g\left(h - h_1\right) = \frac{\upsilon_2^2}{2} ,$$

$$\upsilon_2^2 = \upsilon_1^2 + 2g\left(h - h_1\right).$$

Согласно уравнению неразрывности струи:

$$\upsilon_1 S_1 = \upsilon_2 S_2 ,$$

$$\upsilon_1 = \frac{\upsilon_2 S_2}{S_1} .$$

Следовательно,

$$\upsilon_2^2 = \left(\frac{\upsilon_2 S_2}{S_1} \right)^2 + 2g\left(h - h_1\right),$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2g\left(h-h_1\right)}{1-\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}} .$$

Определим время t:

$$h_1 = \frac{gt^2}{2}, \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} .$$

Подставим (2) и (3) в (1),

$$\ell = \sqrt{\frac{4h_1\left(h-h_1\right)}{1-\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}}, \quad \ell \approx 1,43\, м .$$

Задача 5. Металлический шарик ($\rho_ш = 7800 \, {}^{кг}\!/_{м^3}$) радиусом 3 мм падает в жидкости ($\rho_ж = 960 \, {}^{кг}\!/_{м^3}$, коэффициент вязкости $\eta = 0,99 \; Па \cdot с$) с постоянной скоростью. Определить время, за которое шарик пройдёт расстояние 1 м.

Дано	Решение
$S = 1\ м$ $\upsilon = const$ $\rho_ш = 7800\ {кг}/{м^3}$ $\rho_ж = 960\ {кг}/{м^3}$ $\eta = 0{,}99\ Па \cdot с$ $r = 3\ мм$ $t - ?$	Так как движение шарика равномерное, то $$t = \frac{S}{\upsilon}.$$ На шарик действуют (рис. 4): – сила Архимеда $F_A = \rho_ж g\,V = \rho_ж g \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$, – сила тяжести $mg = \rho_ш V g = \rho_ш \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot g$, – сила вязкого трения, которая для тел

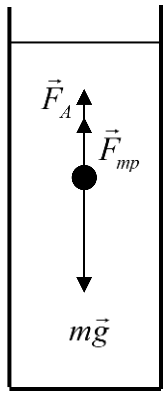


Рис. 4

сферической формы определяется формулой Стокса $F_{тр} = 6\pi\eta r\upsilon$.

По первому закону Ньютона:

$$mg = F_A + F_{тр},$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_ш g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_ж g + 6\pi\eta r\upsilon,$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 g\left(\rho_ш - \rho_ж\right) = 6\pi\eta r\upsilon.$$

Отсюда скорость шарика:

$$\upsilon = \frac{2r^2 g\left(\rho_ш - \rho_ж\right)}{9\eta}.$$

Время, за которое шарик пройдёт расстояние S:

$$t = \frac{9\eta S}{2r^2 g\left(\rho_ш - \rho_ж\right)},\ t \approx 7{,}14\ с$$

Задачи для самостоятельного решения

5.1. Найти КПД двигателя, приводящего в действие гидравлический пресс, для которого отношение площадей $\frac{S_2}{S_1} = 50$. При подъёме груза массой 50 т малый поршень за 2 мин сделал $n = 100$ подъёмов на высоту $h_1 = 0{,}2\ м$. Мощность двигателя $N = 2\,кВт$.

($\eta = \dfrac{nmgh_1S_1}{NtS_2}$, $\eta = 0{,}83$)

5.2. При помощи гидравлического пресса с отношением площадей $\dfrac{S_1}{S_2} = 0{,}01$ нужно поднять груз массой 100 тонн. Определить число ходов малого поршня за 1 мин, если за один ход он опускается на расстояние 20 см. Мощность двигателя пресса 5 кВт, КПД пресса 0,8.

($n = 120\ 1$)

5.3. В дне цилиндрического сосуда диаметром $D = 0{,}5\,м$ имеется круглое отверстие диаметром $d = 1см$. Сосуд заполнен водой до высоты $h = 150\ см$. Найти зависимость скорости понижения уровня воды в сосуде от высоты столба жидкости. Построить график зависимости скорости понижения уровня воды в сосуде от высоты столба жидкости.

($\upsilon_1 = \sqrt{\dfrac{2gh}{\left(\dfrac{D}{d}\right)^4 - 1}}$, $\upsilon_1 \approx 0{,}0022\ ^{м}\!/_{с}$)

5.4. В дне цилиндрического сосуда диаметром площадью поперечного сечения $S_1 = 2\ м^2$ имеется круглое отверстие площадью $S_2 = 8\ см^2$. Найти зависимость скорости вытекания воды из сосуда от высоты столба жидкости. Найти значение этой скорости при $h = 1\ м$.

($\upsilon_2 = \sqrt{\dfrac{2gh}{1 - \left(\dfrac{S_2}{S_1}\right)^2}}$, $\upsilon_2 = 4{,}47\ ^{м}\!/_{с}$)

5.5. Бак цилиндрической формы диаметром $D = 1м$ и объемом $V = 100\,м^3$ заполнен водой. Определить время, необходимое для полного опустошения бака, если на дне бака образовалось круглое отверстие площадью $d = 2см$.

($t = 1{,}78 \cdot 10^4\ с$)

5.6. Цилиндрический бак высотой $h = 4\ м$, поднятый над поверхностью земли на высоту $H = 1{,}3\ м$, полностью заполнен водой. Определить площадь поперечного сечения бака S_1, если через отверстие диаметром $d = 3\,см$, расположенное у основания бака вытекает струя, падающая на землю на максимальное расстояние $\ell = 5\ м$.

($S_1 = \dfrac{\pi \ell d^2}{4\sqrt{\ell^2 - 4hH}}$, $S_1 \approx 1,72 \cdot 10^{-3}\ м^2$)

5.7. Цилиндрический бак диаметром $D = 1\ м$ и высотой $h = 1\ м$, полностью заполненный водой, стоит на земле. На какой высоте H в боковой поверхности бака надо проделать отверстие диаметром $d = 1\ см$, чтобы вытекающая струя падала на пол на максимальном расстоянии $\ell = 50\ см$.

($H = \dfrac{\ell^2}{4h}\left(1 - \left(\dfrac{d}{D}\right)^4\right)$, $H = 0,0625\ м$)

5.8. Определить массу морской воды ($\rho = 1030\ ^{кг}/_{м^3}$), которая проникнет внутрь корпуса корабля за 20 мин через пробоину диаметром $d = 5 см$, которая находится на днище на глубине $h = 4\ м$ под поверхностью воды.

($V = \dfrac{\pi d^2 t \sqrt{2gh}}{4}$, $V = 20,9\ м^3$)

5.9. Два металлический шарик ($\rho_ш = 7800\ ^{кг}/_{м^3}$) радиусами $r_1 = 4\ мм$ и $r_2 = 1\ мм$ начинают одновременно с одной высоты $h = 2\ м$ падать в жидкости ($\rho_ж = 960\ ^{кг}/_{м^3}$, коэффициент вязкости $\eta = 0,99\ Па \cdot с$) с постоянными скоростями. Определить разность времён, за которое шарики достигнут дна сосуда.

($\Delta t = \dfrac{9\eta h}{2g\left(\rho_ш - \rho_ж\right)}\left(\dfrac{1}{r_2^2} - \dfrac{1}{r_1^2}\right)$, $\Delta t \approx 122\ с$)

5.10. Шарик плотностью $\rho_ш$ и диаметром d падает в жидкости плотностью $\rho_ж$ с коэффициентом вязкости η с постоянной скоростью. Определить зависимость скорости шарика от его диаметра $\upsilon(d)$.

6. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

При гармонических колебаниях изменение величины происходит по закону синуса или косинуса:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где x – значение изменяющейся величины;

$A = x_{\max}$ – амплитуда колебаний, максимальное значение изменяющейся величины;

ω_0 – циклическая (круговая) частота собственных незатухающих колебаний;

φ_0 – начальная фаза, определяет значение x в начальный момент времени при $t = 0$.

Скорость и ускорение при гармонических колебаниях:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0),\ \upsilon_{\max} = A\omega_0,$$

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),\ a_{\max} = A\omega_0^2.$$

Циклическая частота связана с периодом и частотой колебаний:

$$\omega_0 = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}.$$

$$T = \frac{t}{N},\quad \nu = \frac{N}{t},\quad T = \frac{1}{\nu},\quad \nu = \frac{1}{T},$$

где N – число колебаний за время t.

Период колебаний пружинного маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

где m – масса тела, k – жесткость пружины.

Кинетическая энергия колеблющейся материальной точки:

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2},\qquad E_{к\max} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}. \tag{1}$$

Потенциальная энергия пружинного маятника:

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2},\qquad E_{p\max} = \frac{kA^2}{2}.$$

Потенциальную энергию можно выразить другой формулой:

$$E_p = \frac{mA^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2}, \quad E_{p\max} = \frac{m\omega_o^2 A^2}{2}. \tag{2}$$

Полная энергия E равна сумме кинетической и потенциальной энергий:

$$E = E_к + E_p = \frac{mA^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2} + \frac{mA^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}, \tag{3}$$

$$E = E_к + E_p = E_{к\max} = E_{p\max}. \tag{4}$$

Период колебаний физического маятника определяется формулой

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mg\ell}}.$$

где J – момент инерции тела относительно оси, проходящей через точку подвеса, ℓ – расстояние от точки подвеса до центра масс тела.

Период колебаний математического маятника определяется формулой Гюйгенса

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}},$$

где ℓ – длина нити.

Для любого тела, совершающего гармонические колебания, справедливы соотношения (1), (2), (3), (4).

Уравнение свободных затухающих колебаний имеет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_o),$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – циклическая частота свободных затухающих колебаний, ω_0 – циклическая частота свободных незатухающих колебаний, β – коэффициент затухания, A_0 – амплитуда в начальный момент времени ($t = 0$).

$A = A_0 e^{-\beta t}$ – закон убывания амплитуды.

Логарифмический декремент затухания:

$$\theta = \ell n\frac{A_0}{A_0 e^{-\beta T}} = \ell n e^{\beta T} = \beta T.$$

При сложении двух колебаний одного направления и одинаковой частоты, описываемых уравнениями

$$x_1 = A_1\cos(\omega_0 t + \alpha_1), \qquad x_2 = A_2\cos(\omega_0 t + \alpha_2),$$

возникает колебание того же направления и частоты. Амплитуда и начальная фаза результирующего колебания определяются формулами

$$A = \sqrt{A_2^2 + A_1^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)},$$

$$tg\alpha = \frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}.$$

При сложении двух колебаний одинаковой частоты и амплитудами A_1 и A_2 во взаимно перпендикулярных направлениях x и y

$$\begin{cases} x = A_1\cos(\omega_0 t + \alpha_1) \\ y = A_2\cos(\omega_0 t + \alpha_2) \end{cases}$$

возникает колебание, описываемое уравнением:

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1).$$

В зависимости от амплитуд и фаз складываемых колебаний траектория результирующего колебания может быто различной.

Примеры решения задач

Задача 1. Написать уравнение колебательного движения с амплитудой $A = 5\ см$ и периодом $T = 8\ с$, если начальная фаза φ_0 колебаний равна: а) 0; б) $\frac{\pi}{2}$.

Дано	Решение
$A = 5\ см = 0,05\ м$	Уравнение гармонических колебаний имеет вид:
$T = 8\ с$	$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right),$$
$\varphi_0 = 0, \quad \frac{\pi}{2}$	
$x(t) - ?$	Следовательно, в случае

а) $x = 0,05\cos\left(\frac{2\pi}{8}t\right) = 0,05\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)\ м$,

б) $x = 0,05\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right) = -0,05\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\ м$.

Задача 2. Материальная точка совершает гармонические колебания с периодом $T = 2\,с$. Смещение точки из положения равновесия в начальный момент времени $x(0) = 2,5\,см$, а максимальное ускорение $a_{\max} = 49\,{см}/{с^2}$. Написать уравнение колебаний.

Дано

$T = 2\ с$

$x(0) = 2,5\ см = 2,5\cdot10^{-2}\ м$

$a_{\max} = 49\ {см}/{с^2} = 0,49\ {м}/{с^2}$

$x(t) - ?$

Решение

Так как материальная точка совершает гармонические колебания, то можно в общем виде записать уравнение гармонических колебаний:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ – угловая частота колебаний.

Ускорение точки

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^{\,2}\cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$$|a_{\max}| = A\omega_0^2 = A\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.$$

Из полученного выражения находим амплитуду колебаний материальной точки:

$$A = \frac{a_{\max}T^2}{4\pi^2}.$$

Начальную фазу колебаний находим из условия:

$$x(0) = A\cos(\omega_0\cdot 0 + \varphi_0) = A\cos\varphi_0, \qquad \varphi_0 = \arccos\frac{x(0)}{A}.$$

Используя исходные данные, получаем

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \ c^{-1}, \quad A = \frac{a_{\max} T^2}{4\pi^2} = \frac{49 \cdot 10^{-2} \cdot 4}{4 \cdot 3{,}14^2} \approx 0{,}05 \ м,$$

$$\varphi_0 = \arccos \frac{2{,}5 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{-2}} = \arccos 0{,}5 = \frac{\pi}{3}.$$

Таким образом,

$$x(t) = 0{,}05 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right) м.$$

Задача 3. Уравнение колебаний материальной точки имеет вид $x = 0{,}06 \cos 100\pi t,\ м$. Чему равны амплитуда, период, частота и начальная фаза колебаний, максимальная скорость и максимальное ускорение точки.

Дано	Решение
$x = 0{,}06 \cos 100\pi t,\ м$ $A - ?$ $T - ?$ $\nu - ?$ $\varphi_0 - ?$ $\upsilon_{\max} - ?$ $a_{\max} - ?$	Сопоставим уравнение гармонических колебаний $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ с данным уравнением колебаний $x = 0{,}06 \cos 100\pi t,\ м$ Из сопоставления видно: $A = 0{,}06\ м, \quad \omega_0 = 100\pi, \quad \varphi_0 = 0.$

Для нахождения T, ν, $\upsilon_{\max}$ и $a_{\max}$ воспользуемся известными формулами:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{100\pi} = 0{,}02\ c,$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}02} = 50\ Гц,$$

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -100\pi \cdot 0{,}06 \sin 100\pi t = -6\pi \sin 100\pi t\ {}^{м}\!/\!_{c},$$

$$\upsilon_{max} = 6\pi = 18,84\ м/с,$$

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -100\pi \cdot 6\pi \cos 100\pi t = -600\pi^2 \cdot \cos 100\pi t\ м/с^2,$$

$$a_{max} = 600\pi^2 = 5915\ м/с^2.$$

Задача 4. Материальная точка массой 1 г совершает гармонические колебания, описываемые уравнением $x = 0,2\sin(\pi t + \frac{\pi}{3})\ м$. Определить кинетическую, потенциальную и полную энергию колеблющейся точки через 1 секунду после начала движения.

Дано

$x = 0,2\sin(\pi t + \frac{\pi}{3})\ м$

$A = 0,2\ м$

$t = 1с$

$m = 0,001\ кг$

$E_к - ?$

$E_p - ?$

$E - ?$

Решение

Как следует из уравнения колебаний:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = 0,2\pi\cos(\pi t + \frac{\pi}{3}).$$

Кинетическая энергия определяется формулой:

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m}{2}\left(0,2\pi\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\right)^2,$$

$$E_к = \frac{0,001(0,2\cdot 3,14)^2}{2}\cos^2\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = 0,49\ мкДж.$$

Согласно закону сохранения механической энергии

$$E = E_{к\max} = \frac{m\upsilon_{max}^2}{2}, \quad E = \frac{m(0,2\pi)^2}{2} = \frac{0,001(0,2\cdot 3,14)^2}{2} = 1,97\ мкДж,$$

$$E_p = E - E_к, \quad E_p = 1,97 - 0,49 = 1,48\ мкДж.$$

Задача 5. Материальная точка совершает гармонические колебания с периодом 12 с и начальной фазой, равной нулю. За какое время от начала колебаний смещение составит половину амплитуды? Определите для этого момента времени отношение кинетической энергии точки к её потенциальной энергии.

Дано	Решение
$T = 12c$ $x = \dfrac{A}{2}$ $t - ?$ $\dfrac{E_к}{E_p} - ?$	$x = A\cos\omega_0 t$, $\dfrac{A}{2} = A\cos\omega_0 t$, $\dfrac{1}{2} = \cos\omega_0 t \Rightarrow \omega_0 t = \arccos\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}$,

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad \frac{2\pi}{T}\cdot t = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{T}{6} = 2c,$$

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin^2 \omega_0 t,$$

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cdot\sin^2\omega_0 t.$$

По закону сохранения механической энергии, полная энергия равна:

$$E = E_к + E_p = E_{к\max},$$

следовательно

$$E_p = E_{к\max} - E_к = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} - \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cdot\sin^2\omega_0 t =$$

$$= \frac{mA^2\omega\omega_{0\,0}^{2\,2}}{2}(1-\sin^2\omega_0 t) = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cdot\cos^2\omega_0 t,$$

$$\frac{E_к}{E_p} = \frac{\sin^2\omega_0 t}{\cos^2\omega_0 t} = tg^2\omega_0 t = tg^2\frac{\pi}{3} = 3.$$

Задача 6. Период колебаний пружинного маятника $T = 2$ с, смещение меняется с течением времени по закону $x = A\sin\frac{2\pi}{T}t$. Через какое минимальное время, начиная с момента $t = 0$, потенциальная энергия маятника достигнет половины своего максимального значения?

Решение

Дано

$x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$

$T = 2c$

$E_p = \frac{E_{p\max}}{2}$

$t - ?$

$$E_{p\max} = \frac{kA^2}{2},\ E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}\sin^2\left(\frac{2\pi}{\text{T}}t\right),$$

$$\frac{kA^2}{2}\sin^2\left(\frac{2\pi}{\text{T}}t\right) = \frac{kA^2}{4},$$

$$\sin^2\left(\frac{2\pi}{\text{T}}t\right) = \frac{1}{2},\ \sin\left(\frac{2\pi}{\text{T}}t\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Т.к. $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ если $\varphi = \frac{\pi}{4}$, следовательно,

$$\frac{2\pi}{T}t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{T}{4} = 0{,}5\,c.$$

Задача 7. Материальная точка массой 20 г совершает гармонические колебания с амплитудой 5 см и частотой 1 Гц. Определить максимальную силу, действующую на точку, и полную энергию колеблющейся точки.

Решение

Дано

$m = 0{,}02\ кг$

$A = 0{,}05\ м$

$\nu = 1\ Гц$

$F_{\max} - ?$

$E - ?$

Согласно второму закону Ньютона:

$$F = ma,\quad F_{\max} = ma_{\max}.$$

Согласно закону сохранения механической энергии:

$$E = E_{\kappa\max} = \frac{m\upsilon_{\max}^2}{2}.$$

Найдём из уравнения гармонического колебания $\upsilon_{\max}$ и $a_{\max}$:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi_0),\qquad \upsilon_{\max} = A\omega_0,$$

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0),\qquad a_{\max} = A\omega_0^2.$$

Поскольку $\omega = 2\pi\nu$,

$$F_{\max} = ma_{\max} = mA\omega_0^2 = mA\left(2\pi\nu\right)^2, \qquad F_{\max} = 0,0394\,H.$$

$$E = E_{\kappa\max} = \frac{m\upsilon_{\max}^2}{2} = \frac{m\left(2\pi\nu A\right)^2}{2}, \qquad E = 0,986\ мДж.$$

Задача 8. К невесомой пружине подвешен груз массой 0,18 кг, который совершает свободные гармонические колебания. Какой должна быть масса груза, чтобы частота колебаний увеличилась в 3 раза?

Дано

$m_1 = 0,18\ кг$

$\nu_2 = 3\nu_1$

$m_2 - ?$

Решение

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\sqrt{k}}{2\pi\sqrt{m}},$$

$$\div\begin{cases} \nu_2 = \dfrac{\sqrt{k}}{2\pi\sqrt{m_2}} \\ \nu_1 = \dfrac{\sqrt{k}}{2\pi\sqrt{m_1}} \end{cases},$$

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{\nu_2^2}{\nu_1^2} = \frac{9\nu_1^2}{\nu_1^2} = 9,$$

$$m_1 = 9m_2,\ m_2 = \frac{m_1}{9} = \frac{0,18}{9} = 0,02\ кг.$$

Задача 9. К пружине жесткостью 200 Н/м прикреплена тележка, которая совершает гармонические колебания с амплитудой 1 см. Какова максимальная кинетическая энергия тележки?

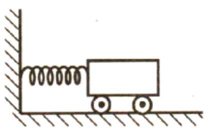


Рис. 1

Дано

$k = 200\ Н/м$

$A = 0,01\ м$

$E_{\kappa\max} - ?$

Решение

Согласно закону сохранения энергии

$$E = E_{p\max} = E_{\kappa\max} = E_p + E_\kappa,$$

$$E_{\kappa\max} = E_{p\max} = \frac{kA^2}{2} = 0,01\ Дж.$$

Задача 10. Математический маятник длиной 1 м совершается затухающие колебания, при которых за одну минуту амплитуда уменьшилась в два раза. Найти число колебаний, за которое это произошло и логарифмический декремент затухания. Ускорение свободного падения $g = 10\ {}^{м}\!/\!{}_{с^2}$.

Дано	Решение
$\ell = 1\ м$ $t = 60\ с$ $\dfrac{A_0}{A} = 2$ $N - ?$ $\theta - ?$	Период колебаний математического маятника: $$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}},$$ $$N = \frac{t}{T} = \frac{t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}} = \frac{60}{6{,}28}\sqrt{\frac{10}{1}} = 30\,.$$

Согласно закону убывания амплитуды:

$$A = A_0 e^{-\beta t},$$

$$\frac{A_0}{A} = e^{\beta t},$$

$$\ell n\frac{A_0}{A} = \beta t \Rightarrow \beta = \frac{1}{t}\ell n\frac{A_0}{A}\,.$$

Логарифмический декремент затухания определяется формулой:

$$\theta = \beta t\frac{2\pi}{t}\ell n\frac{A_0}{A}\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 0{,}023\,.$$

Задача 11. Найти амплитуду A и начальную фазу α гармонического колебания, полученного от сложения одинаково направленных колебаний, заданных уравнениями $x_1 = 0,02\cos\left(5\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ *м* и $x_2 = 0,03\cos\left(5\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ *м*.

Дано

$x_1 = 0,02\cos\left(5\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ *м*

$x_2 = 0,03\cos\left(5\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ *м*

$A - ?$

$\alpha - ?$

Решение

Для решения задачи можно воспользоваться методом векторных диаграмм для сложения одинакового направленных колебаний и готовыми формулами

$$A^2 = A_2^2 + A_1^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Получаем амплитуду результирующего колебания:

$$A = \sqrt{A_2^2 + A_1^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)},$$

$$A = \sqrt{0,02^2 + 0,03^2 + 2\cdot 0,02\cdot 0,03\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} = 0,46 \text{ м}.$$

Поскольку $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{4}$,

$$tg\alpha = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{A_1\cdot\sin\alpha_1 + A_2\cdot\sin\alpha_2}{A_1\cdot\cos\alpha_1 + A_2\cdot\cos\alpha_2} = \frac{A_1 + A_2\cdot\sin\alpha_2}{A_2\cdot\cos\alpha_2},$$

$$tg\alpha = \frac{0,02 + 0,03\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{0,03\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1,94, \qquad \alpha = arctg(1,94) = 62^o 44'.$$

Задача 12. Определить уравнение траектории и амплитуду результирующего колебания точки, которая участвует одновременно в двух взаимно-перпендикулярных колебаниях, описываемых уравнениями $x = 3\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$ *м* и $y = 3\cos(\omega_0 t)$ *м*.

Дано

$x = 3\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) м$

$y = 3\cos(\omega_0 t)\ м$

$y(x) - ?$

$A - ?$

Решение

Согласно теории, уравнение, описывающее результирующее колебание точки, имеет вид:

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Для данной задачи:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} - \frac{2xy}{9}\cos\frac{\pi}{2} = \sin^2\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

$$x^2 + y^2 = 9.$$

Это уравнение окружности с радиусом 3 м, т.е. амплитуда результирующего колебания $A = 3\ м$.

Задачи для самостоятельного решения

6.1. Уравнение движения точки имеет вид $x = 0,03\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) м$. Определить амплитуду, циклическую частоту, начальную фазу, период и частоту колебаний.

6.2. Напишите уравнение гармонических колебаний колеблющейся точки, если она за 3 минуты совершает 180 колебаний с амплитудой 4 см; начальная фаза равна 45^0.

6.3. Точка совершает гармонические колебания по закону $x = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) м$. Определите период, начальную фазу, максимальную скорость и максимальное ускорение.

($T = 4\ с$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$, $\upsilon_{\max} = 4,71\ м/с$, $a_{\max} = 7,4\ м/с^2$)

6.4. Точка совершает гармонически колебания с амплитудой 5 см и периодом 4 с. Определите её максимальную скорость и максимальное ускорение.

($\upsilon_{\max} = 7,85\, {}^{см}\!/_{с}$, $a_{\max} = 12,3\, {}^{см}\!/_{с^2}$)

6.5. Определить, через какую долю периода от начала колебаний скорость колеблющейся точки будет равна половине её максимального значения. Начальная фаза гармонических колебаний точки равна нулю.

($t = \dfrac{T}{12}$)

6.6. Точка совершает гармонически колебания с периодом 6 с, начальная фаза равна нулю. За какое время от начала колебаний её ускорение будет равно половине максимального значения?

($t = 1\, с$)

6.7. Как изменилась амплитуда колебаний пружинного маятника, если полная механическая энергия увеличилась в 4 раза?

(Амплитуда увеличилась в 2 раза)

6.8. Груз массой 0,2 кг, прикрепленный к пружине жесткостью 20 Н/м, совершает свободные гармонические колебания. С какой скоростью груз проходит положение равновесия, если амплитуда колебаний 6 см?

($\upsilon = 0,6\, {}^{м}\!/_{с}$)

6.9. Пружинный маятник, совершающий гармонические колебания, представляет собой груз массой 4 кг, подвешенный на пружине жесткостью 100 Н/м. Определите максимальную скорость груза, если его максимальное ускорение равно 10 м/с^2.

($\upsilon = 2\, {}^{м}\!/_{с}$)

6.10. Два математических маятника совершают свободные колебания, причем за одно и то же время первый маятник совершает два колебания, а второй – четыре. Во сколько раз длина нити первого маятника отличается от длины нити второго?

(Нить первого маятника в 4 раза длиннее)

6.11. Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой 2 см. Определить полную энергию колеблющейся точки, если максимальная сила, действующая на нее, равна 0,2 мН.

($E = 2\ мкДж$)

6.12. Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой 4 см. Полная энергия колеблющейся точки равна 0,5 мкДж. Определить, при каком смещении от положения равновесия на точку действует сила 10 мкН.

($x = 1,6\ см$)

6.13. Груз, подвешенный к упругой пружине, колеблется по вертикали с амплитудой 0,1 м. Определить жесткость пружины, если максимальная кинетическая энергия груза равна 1 Дж.

($k = 200\ {}^{Н}\!/_{м}$)

6.14. При увеличении массы груза, подвешенного к упругой пружине, на 0,8 кг период колебаний груза увеличился в три раза. Определить первоначальную массу груза.

($m = 0,1\ кг$)

6.15. Физический маятник в виде тонкого однородного стержня длиной 1 м совершает малые колебания около горизонтальной оси, проходящей перпендикулярно стержню через точку, удаленную от его середины на расстояние 0,3 м. Определить период колебаний стержня.

($T = 1,52\ с$)

6.16. Однородный диск радиусом 0,3 м колеблется около горизонтальной оси, проходящей через одну из образующих боковой поверхности диска. Определить период колебаний диска.

($T = 1,34\ с$)

6.17. Определить период колебаний математического маятника длиной 1 м, подвешенного в вагоне, который движется горизонтально с ускорением 3м/с^2.

($T = 1,96\ с$)

6.18. Определить период колебаний математического маятника длиной 0,8 м, подвешенного в лифте, который поднимается с ускорением 2,8 м/с^2.

($T = 1,58\, c$)

6.19. Разность фаз двух одинаково направленных гармонических колебаний с одинаковым периодом Т=8 с и одинаковыми амплитудами А=2 см составляет $\frac{\pi}{4}$, а начальная фаза одного из колебаний равна нулю. Запишите уравнение результирующего колебания.

($x = 3,7\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{8}\right) см$)

6.20. В результате сложения двух одинаково направленных гармонических колебаний с одинаковыми амплитудами и периодами получается результирующее колебание с тем же периодом и той же амплитудой. Найти разность фаз складываемых колебаний.

($\Delta\varphi = \frac{2\pi}{3}$)

6.21. Точка участвует в двух колебаниях, периоды и начальные фазы которых одинаковы, амплитуды колебаний равны 3 см и 4 см. Найти амплитуду результирующего колебания, если колебания совершаются: а) в одном направлении; б) во взаимно перпендикулярных направлениях.

(а) $A = 7\, см$; б) $A = 5\, см$)

6.22. Материальная точка участвует одновременно в двух колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = 3\cos\omega t$ и $y = 4\cos\omega t$. Записать уравнение траектории точки.

($y = \frac{4x}{3}$)

6.23. Найти логарифмический декремент затухания математического маятника длиной 1 м, если за одну минуту амплитуда колебаний уменьшилась в два раза.

($\theta = 0,023$)

6.24. Во сколько раз уменьшится амплитуда затухающих колебаний маятника за три минуты, если за одну минуту она уменьшилась вдвое?

(В 8 раз)

6.25. Логарифмический декремент затухания математического маятника равен 0,15. Во сколько раз уменьшится амплитуда колебаний за одно полное колебание маятника?

(В 1,16 раза)

Литература

1. Т.И. Трофимова, «Курс физики», – М: Академия, 2013 г.
2. Т.И. Трофимова, А.В. Фирсов, «Курс физики. Задачи и решения», – М: Академия, 2011 г.
3. Т.И. Трофимова, З.Г. Павлова, «Сборник задач по курсу физики с решениями», – М: Высшая школа, 1999 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ