МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ДГТУ)

Кафедра «Физика»

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ФИЗИКЕ

направление 25.03.01 Техническая эксплуатация летательных аппаратов и двигателей
профиль 25.03.01 Инженерно-техническое обеспечение полетов летательных аппаратов

1 семестр

Ростов-на-Дону
2022

Введение

Контрольная работа (КР) по физике для студентов первого курса заочной формы обучения – это вид самостоятельной работы, предполагающий решение **четырёх** многоэтапных физических задач, проведение расчетов и построение графиков зависимостей физических величин.

Правила оформления контрольной работы

1. В каждом из четырёх заданий КР разработано 30 вариантов заданий, что обеспечивает возможность выполнения каждым студентом индивидуальной работы. **Номер варианта соответствует порядковому номеру студента в списке группы (см. электронный журнал).**
2. КР выполняется в 12-листовой тетради в клетку.
3. К обложке тетради приклеивается титульный лист установленного образца (см. файл Титульный лист) с заполненными данными студента.
4. КР выполняется от руки разборчивым почерком и не должна содержать исправлений.
5. Работа начинается с записи данных варианта задания под рубрикой «Дано».
6. Каждый пункт выполняемого задания должен быть пронумерован в соответствии с условием и озаглавлен.

Пример: 1. Период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, $T = \dfrac{2 \cdot 3{,}14}{1{,}82} = 5{,}18\,c$.

7. Расчёт всех величин проводится с определённой точностью:

а) если значение величины больше единицы, то округление выполняется с точностью до двух знаков после запятой (пример: $x = 15{,}18639456 \approx 15{,}19$);

б) если значение величины меньше единицы, то округление выполняется с точностью до двух значащих цифр высшего разряда (пример: $x = 0{,}00253946 \approx 0{,}0025$).

8. Рисунки выполняются только с использованием простого карандаша, линейки, циркуля.

9. Графики строятся только с использованием простого карандаша и линейки на миллиметровой бумаге. Площадь поля каждого графика должна быть не менее 10 см×12 см.

10. На осях координат должны быть указаны физические величины и единицы их измерения; масштаб наносится на оси с постоянным шагом.

11. Точки наносятся на поле чертежа без указания их на координатных осях и проведения каких-либо штриховых линий.

12. Затем точки соединяются плавной линией, соответствующей графическому изображению той функции (линейной, квадратичной, экспоненциальной и т.д.), которая отражает проявляющуюся в данном опыте известную или предполагаемую физическую закономерность, выраженную в виде соответствующей формулы.

13. Если на одном поле располагаются несколько графиков, то каждый из них должен быть подписан.

Выполненная КР высылается почтой на адрес деканата факультета АВИАСТРОЕНИЕ.

Задание 1. ЭЛЕМЕНТЫ КИНЕМАТИКИ

Краткая теория

Полное ускорение материальной точки при криволинейном движении (рис. 1):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \qquad [a] = 1\,{}^{м}\!/\!{}_{c^2}.$$

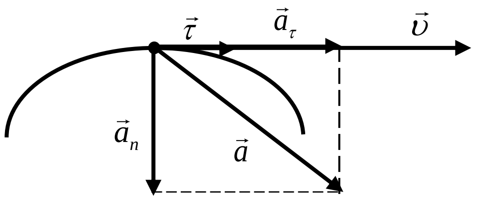

Рис. 1

Тангенциальное ускорение характеризует быстроту изменения скорости криволинейного движения по величине,

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau}, \qquad a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}.$$

Нормальное ускорение характеризует изменение скорости криволинейного движения по направлению,

$$\vec{a}_n = \upsilon\frac{d\vec{\tau}}{dt}, \qquad a_n = \frac{\upsilon^2}{R},$$

где R – радиус кривизны траектории.

Угловой скоростью называется векторная величина, равная первой производной угла поворота тела по времени:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \qquad \omega = \frac{d\varphi}{dt}, \qquad [\omega] = 1\,{}^{рад}\!/\!{}_{c}.$$

Направление вектора угловой скорости определяется по правилу правого винта: вектор угловой скорости сонаправлен с поступательным движения винта, головка которого вращается в направлении движения точки по окружности.

Угловое ускорение характеризует изменение угловой скорости с течением времени и определяется как первая производная угловой скорости по времени:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt}, \qquad [\varepsilon] = 1\,{}^{рад}\!/\!{}_{c^2}.$$

При ускоренном движении вектор $\vec{\varepsilon}$ сонаправлен с $\vec{\omega}$, при замедленном – вектора $\vec{\varepsilon}$ направлен противоположно вектор $\vec{\omega}$.

Связь между кинематическими характеристиками:

$$\upsilon = \omega \cdot R, \quad a_\tau = R\cdot\varepsilon, \quad a_n = \omega^2 \cdot R.$$

Условие задания

Диск радиуса $R = 10\ см$ вращается вокруг вертикальной оси так, что уравнение его движения имеет вид $\varphi(t) = A + Bt^2,\ рад$ (на рис. 2 и 3 приведены две проекции вращающегося диска). Коэффициенты A, B, C для каждого варианта задаются в табл. 1. Время $t_1 = 0$, $t_2 = 4\ с$.

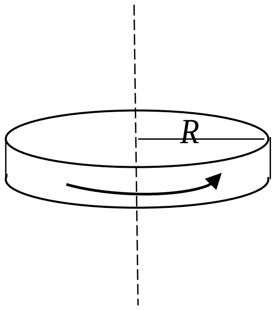

Рис. 2

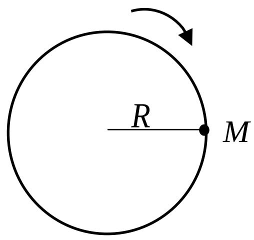

Рис. 3

1. Построить график зависимости $\varphi(t)$ в интервале от t_1 до t_2 (точки для построения выбирать с шагом $0,5\ с$). Координаты точек для построения графика заносить в табл. 2.
2. Получить выражение для угловой скорости $\omega(t)$.
3. Построить график зависимости $\omega(t)$ в интервале от t_1 до t_2 (точки для построения выбирать с шагом $0,5\ с$).
4. Получить выражение для углового ускорения $\varepsilon(t)$.
5. Построить график зависимости $\varepsilon(t)$ в интервале от t_1 до t_2 (точки для построения выбирать с шагом $0,5\ с$).
6. Указать на рис. 2 направления векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ для момента времени $t = 2\ с$.
7. Для точки, лежащей на ободе диска, вычислить значения линейной скорости υ, нормального a_n, тангенциального a_τ и полного ускорения a в момент времени $t = 2\ с$.
8. На рис. 3 указать направления векторов $\vec{\upsilon}$, $\vec{a}_n$, $\vec{a}_\tau$, $\vec{a}$ для момента времени $t = 2\ с$.

Таблица 1. Варианты заданий

вариант	A, $рад/с$	B, $рад/с^2$	вариант	A, $рад/с$	B, $рад/с^2$
1	0,5	1,3	**18**	2,5	4,0
2	1,5	1,3	**19**	0,5	4,0
3	2,0	1,3	**20**	1,5	4,0
4	2,5	1,3	**21**	0,5	5,0
5	0,5	2,2	**22**	1,5	5,0
6	1,5	2,2	**23**	2,0	5,0
7	2,0	2,2	**24**	2,5	5,0
8	2,5	2,2	**25**	0,5	1,0
9	0,5	2,2	**26**	1,5	1,0
10	1,5	2,2	**27**	2,0	1,0
11	0,5	1,2	**28**	2,5	1,0
12	1,5	1,2	**29**	0,5	2,5
13	2,0	1,2	**30**	1,5	2,5
14	2,5	1,2	**31**	0,5	1,2
15	0,5	2,0	**32**	1,5	1,2
16	1,5	2,0	**33**	2,0	2,0
17	2,0	4,0	**34**	2,5	2,0

Таблица 2. Данные для построения графиков $\varphi(t)$, $\omega(t)$, $\varepsilon(t)$

t, $с$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
φ, $рад$									
ω, $рад/с$									
ε, $рад/с^2$									

Пример выполнения

Диск радиуса $R = 1\,м$ вращается вокруг вертикальной оси так, что уравнение его движения имеет вид $\varphi(t) = A + Bt^2,\ рад$, где $A = 1\,рад$, $B = 2\,рад/с^2$. Время $t_1 = 0$, $t_2 = 4\,с$.

$\varphi(t) = A + Bt^2,\ рад$

$A = 1\,рад$

$B = 2\,рад/с^2$

$R = 1\,м$

$t_1 = 0$

$t_2 = 4\,с$

1. Определим координаты точек для построения графика, $\varphi(t) = A + Bt^2$ в интервале от $t_1 = 0$ до $t_2 = 4\,с$ (точки для построения выбирать с шагом $0{,}5\,с$):

$t = 0$, $\varphi = 1 + 2\cdot 0 = 1\,рад$,

$t = 0{,}5\,с$, $\varphi = 1 + 2\cdot 0{,}5^2 = 1{,}5\,рад$,

$t = 1\,с$, $\varphi = 1 + 2\cdot 1^2 = 3\,рад$ и т.д.

Значения φ для всех значений t, необходимых для построения графика, заносим в первую стоку табл. 2.

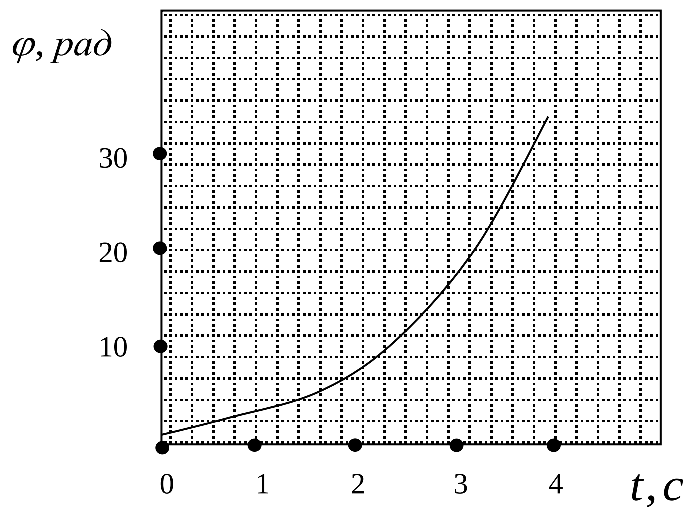

Рис. 1. График зависимости $\varphi(t)$

2. Угловая скорость, $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = 2Bt, \,{рад}/{с}$.

3. Определим координаты точек для построения графика, $\omega(t) = 2Bt$ в интервале от $t_1 = 0$ до $t_2 = 4\,с$ (точки для построения выбирать с шагом $0{,}5\,с$):

$t = 0$, $\omega = 2\cdot 2\cdot 0 = 0$,

$t = 0{,}5\,с$, $\omega = 2\cdot 2\cdot 0{,}5 = 2\,{рад}/{с}$,

$t = 1\,c$, $\omega = 2\cdot 2\cdot 1 = 4\,{}^{рад}\!/_{c}$ и т.д.

Численные значения ω, необходимые для построения графика, заносим табл. 2.

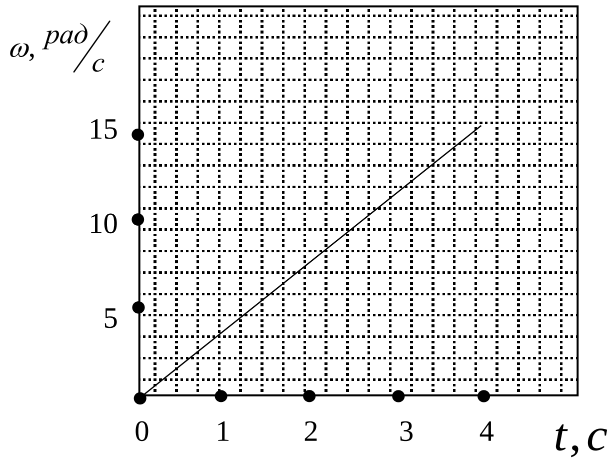

Рис. 2. График зависимости $\omega(t)$

4. Угловое ускорение $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = 2B, {}^{рад}\!/_{c^2}$.

5. Определим координаты точек для построения графика, $\varepsilon(t) = 2B$ в интервале от $t_1 = 0$ до $t_2 = 4\,c$ (точки для построения выбирать с шагом $0{,}5\,c$). Очевидно, это

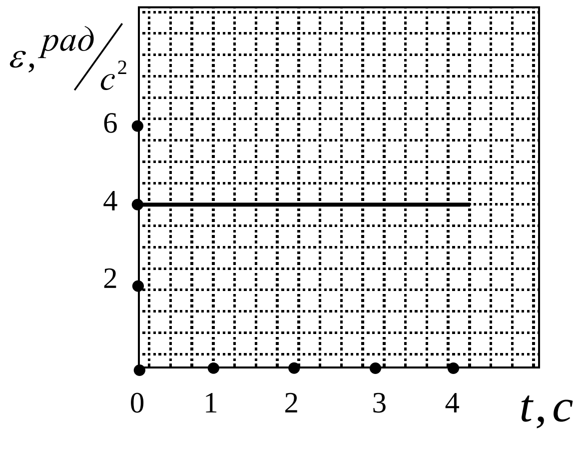

Рис. 3. График зависимости $\varepsilon(t)$

прямая, параллельная оси абсцисс.

6. Направления векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ для момента времени $t = 2\,c$ (рис. 4).

7. Линейная скорость $\upsilon = \omega \cdot R$, при $t = 2\,c$, $\upsilon = 8\cdot 1 = 8\,{}^{м}\!/_{c}$;

нормальное ускорение $a_n = \frac{\upsilon^2}{R}$, при $t = 2\ c$, $a_n = \frac{8^2}{1} = 64 \, м/с^2$;

тангенциальное ускорение $a_\tau = R \cdot \varepsilon$, при $t = 2\ c$, $a_\tau = 1 \cdot 4 = 4 \, м/с^2$;

полное ускорение $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$, при $t = 2\ c$, $a = \sqrt{64^2 + 4^2} = 64{,}12 \, м/с^2$.

8. Направления векторов $\vec{\upsilon}$, $\vec{a}_n$, $\vec{a}_\tau$, $\vec{a}$ для момента времени $t = 2\,c$ указаны на рис.5.

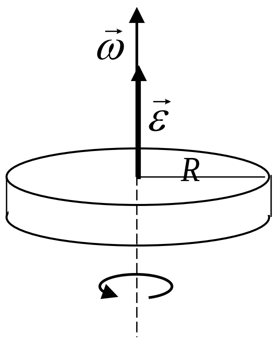

Рис. 4

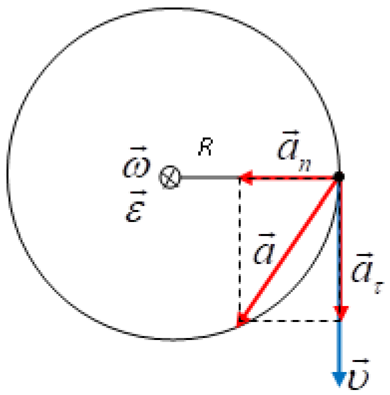

Рис. 5

Таблица 2. Данные для построения графиков $\varphi(t)$, $\omega(t)$, $\varepsilon(t)$.

t, c	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
φ, *рад*	1	1,5	3	5,5	9	13,5	19	25,5	33
ω, $рад/c$	0	2	4	6	8	10	12	14	16
ε, $рад/c^2$	4	4	4	4	4	4	4	4	4

Задание 2. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

Краткая теория

Скорость и путь при равноускоренном движении:

$$S = \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2}, \quad \upsilon = \upsilon_0 + at.$$

Если на материальную точку одновременно действует несколько сил, то результирующая сила равна их векторной сумме:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i .$$

Второй закон Ньютона: ускорение материальной точки прямо пропорционально действующей на неё силе и обратно пропорционально её массе:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Импульс – векторная величина, равная произведению массы тела на его скорость:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}, \qquad [p] = 1\,\frac{кг \cdot м}{с}.$$

Изменение импульса материальной точки равно импульсу действующей на нее силы:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t .$$

Величину $\vec{F} \cdot \Delta t$ называют *импульсом силы*. Импульс силы равен произведению силы на время её действия.

Работа постоянной силы равна произведению силы на перемещение точки приложения силы и на косинус угла α между векторами $\vec{F}$ и $\vec{S}$:

$$A = FS\cos\alpha, \qquad [A] = 1\,Дж.$$

Кинетическая энергия поступательно движущегося тела:

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2}, \quad [E_к] = 1\,Дж.$$

Теорема о потенциальной энергии: работа консервативных сил, приложенных к системе, равна убыли её потенциальной энергии

$$A = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p .$$

Конкретный вид функции E_p зависит от характера силового поля и выбора нулевого уровня. Поскольку нулевой уровень выбирается произвольно, E_p может иметь отрицательные значения.

Полная механическая энергия тела равна сумме кинетической и потенциальной энергий:

$$E = E_к + E_p .$$

Условие задания

На материальную точку массой m, движущуюся с начальной скоростью $\upsilon_0 = 2 \ м/с$, действуют две взаимно перпендикулярные постоянные по величине консервативные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (рис. 1).

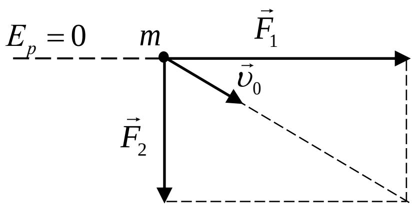

Рис. 1

Числовые значения m, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ для каждого варианта задаются в табл. 1. Время $t_0 = 0$, $t = 2 \ с$.

1. Вычислить значение результирующей силы, действующей на материальную точку. Указать на рисунке её направление.
2. Вычислить значение ускорения материальной точки, указать на рисунке его направление.
3. Вычислить значение скорости материальной точки в момент времени t, указать на рисунке её направление.
4. Вычислить путь, пройденный материальной точки за 2 с.
5. Вычислить значения импульса материальной точки в моменты времени t_0 и t, указать на рисунке их направление.
6. Вычислить значение импульса силы за промежуток времени $\Delta t = t - t_0$.
7. Вычислить работу результирующей силы в интервале времени $\Delta t = t - t_0$.

8. Вычислить кинетическую энергию материальной точки в моменты времени t_0 и t.

9. Вычислить значение потенциальной энергии материальной точки в момент времени t, считая, что в начальный момент времени потенциальная энергия точки была равна нулю.

10. Вычислить полную механическую энергию материальной точки в моменты времени t_0 и t.

Таблица 1. Варианты заданий

вариант	m, *кг*	F_1, *Н*	F_2, *Н*	**вариант**	m, *кг*	F_1, *Н*	F_2, *Н*
1	3,5	3	5	**17**	2	9	4
2	3,5	4	6	**18**	2	10	3
3	3,5	5	7	**19**	2	11	2
4	3,5	6	8	**20**	2	12	1
5	3,5	7	9	**21**	3	3	4
6	3,5	8	10	**22**	3	4	5
7	3,5	9	9	**23**	3	5	6
8	3,5	10	8	**24**	3	6	7
9	3,5	11	7	**25**	3	7	8
10	3,5	12	6	**26**	3	8	9
11	4,2	3	10	**27**	3	9	7
12	4,2	4	9	**28**	4	10	6
13	4,2	5	8	**29**	4	11	5
14	4,2	6	7	**30**	4	12	4
15	4,2	7	6	**31**	4	4	5
16	4,2	8	5	**32**	4	5	6

При выполнении Задания 2 необходимо скопировать рис. 1, приведённый в условии, и на нем указать векторы: $\vec{F}_{рез}$, $\vec{a}$, $\vec{\upsilon}$, $\vec{p}$.

Пример выполнения

На материальную точку массой $m=1,2\,кг$, движущуюся с начальной скоростью $\upsilon_0=1\,{}^{м}\!/\!{}_{с}$, действуют две взаимно перпендикулярные постоянные по величине консервативные силы $F_1=4\,H$ и $F_2=7\,H$ (см. рис. 1). Время $t_0=0$, $t=2\,с$.

$m=1,2\,кг$ $\upsilon_0=1\,{}^{м}\!/\!{}_{с}$ $F_1=4\,H$ $F_2=7\,H$ $t_1=0$ $t=2\,с$	1. Результирующая сила, действующая на материальную точку: $$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2.$$ Численное значение результирующей силы: $$F=\sqrt{F_1^2+F_2^2}, \quad F=\sqrt{4^2+7^2}=\sqrt{16+49}=\sqrt{65}=8,06\,H.$$ 2. Ускорение материальной точки по второму закону Ньютона: $$\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m}.$$

Вектор $\vec{a}$ сонаправлен с вектором результирующей силы $\vec{F}$.

Численное значение ускорения:

$$a=\frac{8,06}{1,2}=6,72\,{}^{м}\!/\!{}_{с^2}.$$

3. Скорость материальной точки при равноускоренном движении:

$$\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_0+\vec{a}t.$$

Вектор $\vec{\upsilon}$ сонаправлен с вектором начальной скорости $\vec{\upsilon}_0$.

Численное значение скорости в момент времени $t=2\,с$:

$$\upsilon=1+6,72\cdot 2=14,44\,{}^{м}\!/\!{}_{с}.$$

4. Путь, пройденный материальной точкой при равноускоренном движении:

$$S=\upsilon_0 t+\frac{at^2}{2}.$$

Путь, пройденный за 2 с:

$$S = 1 \cdot 2 + \frac{6{,}72 \cdot 2^2}{2} = 15{,}44 м .$$

5. Импульс материальной точки:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon} .$$

Вектор $\vec{p}$ сонаправлен с вектором скорости $\vec{\upsilon}$.

В момент времени $t_0 = 0$ $\qquad p_0 = 1{,}2 \cdot 1 = 1{,}2 \frac{кг \cdot м}{с}$.

В момент времени $t = 2\ с$ $\qquad p = 1{,}2 \cdot 14{,}44 = 17{,}33 \frac{кг \cdot м}{с}$.

Задание 3. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТЕЛА

Краткая теория

Момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении.

Момент инерции материальной точки относительно неподвижной оси вращения равен произведению её массы на квадрат расстояния до рассматриваемой оси вращения:

$$J = mr^2, \ [J] = 1\,кг \cdot м^2 .$$

Момент инерции – аддитивная величина, т. е. момент инерции системы тел относительно некоторой неподвижной оси равен сумме моментов инерции отдельных тел или частей системы относительно этой оси:

$$J = \sum_{i=1}^{n} J_i .$$

Говорить о моменте инерции, не привязывая его к конкретной оси, бессмысленно.

Моменты инерции однородных тел симметричной формы относительно оси, проходящей через центр масс (рис. 1)

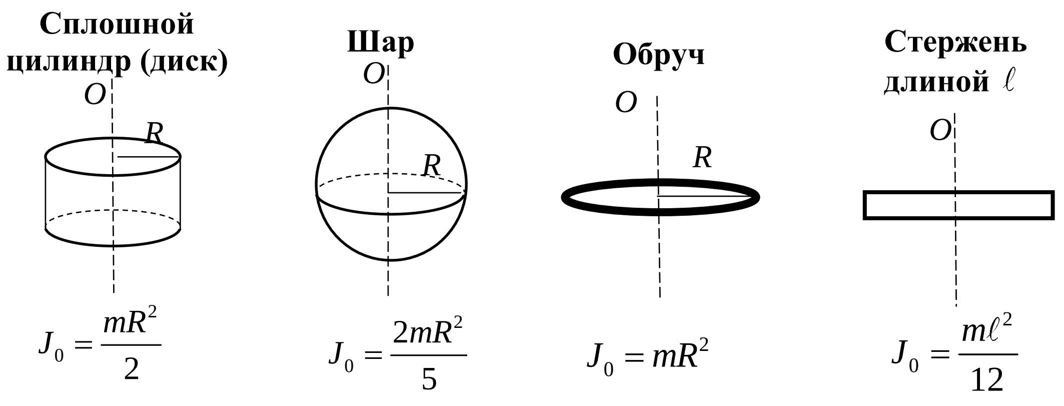

Рис. 1

Если ось вращения не проходит через центр масс тела, то момент инерции тела относительно этой оси, определяется по *теореме Штейнера*: момент инерции тела J относительно произвольной оси равен сумме момента инерции тела J_0 относительно оси, проведенной через центр масс тела параллельно данной оси, и произведения массы тела на квадрат расстояния d между этими осями,

$$J = J_0 + md^2.$$

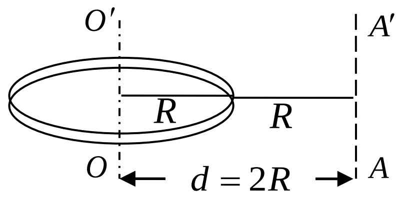

Рис. 2

Например, для обруча момент инерции относительно оси AA' (рис. 2) равен

$$J = J_0 + md^2 = mR^2 + m(2R)^2 = 5mR^2.$$

Условие задания

Система состоит из трёх однородных симметричных тел правильной геометрической формы (варианты конфигураций тел и их параметры приведены в таблицах 1 и 2). Тела расположены так, что они соприкасаются попарно в одной точке, а их центры масс лежат на одной горизонтальной оси (если в систему входит кольцо, оно располагается в горизонтальной плоскости).

1. Нарисовать рисунок, соответствующий конфигурации тел варианта задания (в качестве примера см. рис. 3).
2. Рассчитать момент инерции системы тел относительно оси, проходящей через центр масс центрального тела перпендикулярно горизонтальной оси.

Таблица 1. Варианты заданий

вариант	конфигурация тел	вариант	конфигурация тел	вариант	конфигурация тел
1	BEA	**13**	CDA	**25**	CAE
2	CEA	**14**	BDA	**26**	CAC
3	AED	**15**	BDB	**27**	CAD
4	AEA	**16**	BDE	**28**	CAA
5	CED	**17**	ADA	**29**	DAA
6	AEC	**18**	ADD	**30**	DAD
7	CEB	**19**	ADE	**31**	BAE
8	DEA	**20**	DDE	**32**	BAC
9	DED	**21**	EBA	**33**	BAD
10	DEC	**22**	CAC	**34**	BAA
11	CDE	**23**	BAD	**35**	ACA
12	CDD	**24**	BAA	**36**	ABC

Таблица 2. Параметры тел

тело		**масса**, $m\,(кг)$	**радиус**, $R\,(м)$
A	Сплошной цилиндр	2	0,2
B	Диск	4	0,1
C	Шар	5	0,3
D	Обруч	1	0,4
E	Стержень	3	длина $\ell = 0,2\ м$

Пример выполнения

Пусть конфигурация тел – EDA.

Согласно табл. 2 тело E – стержень, тело D – обруч, тело A – сплошной цилиндр.

1. Используя данные табл. 2, запишем:

масса стержня $m_{ст} = 3\ кг$;

масса обруча $m_{об} = 1\ кг$;

масса цилиндра $m_{ц} = 2\ кг$;

длина стержня $\ell = 0,2\ м$;

радиус обруча $R_{об} = 0,4\ м$;

радиус основания цилиндра $R_{ц} = 0,2\ м$.

2. Система тел EDA (рис. 3).

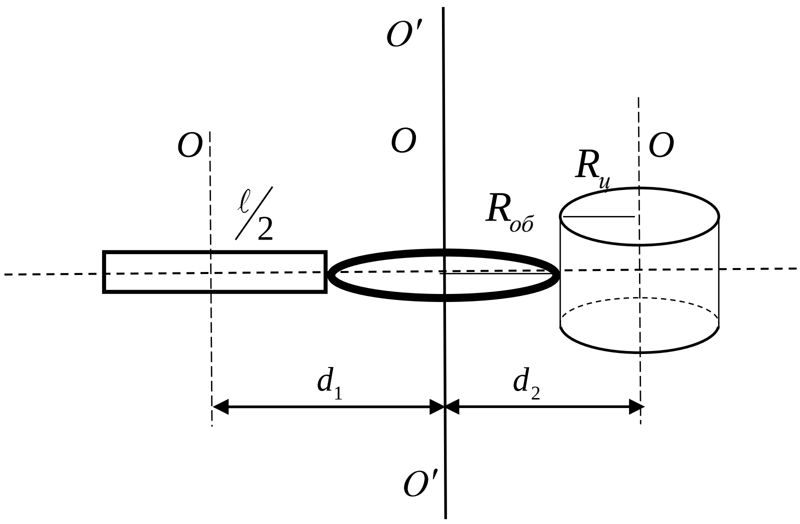

Рис. 3

3. Рассчитаем момент инерции системы тел EDA относительно оси $O'O'$.

Т.к. момент инерции системы тел относительно некоторой неподвижной оси равен сумме моментов инерции отдельных тел системы относительно этой оси, то можно записать:

$$J = J_{ст} + J_{об} + J_{ц}.$$

По теореме Штейнера момент инерции относительно оси $O'O'$:

– стержня

$$J_{ст} = J_0 + m_{ст}d_1^2 = \frac{m_{ст}\ell^2}{12} + m_{ст}\left(\frac{\ell}{2} + R_{об}\right)^2,$$

$$J_{ст} = \frac{3 \cdot 0,2^2}{12} + 3 \cdot \left(\frac{0,2}{2} + 0,4\right)^2 = 0,79\ кг \cdot м^2;$$

– обруча

$$J_{об} = J_0 = m_{об}R_{об}^2,$$

$$J_{об} = 1 \cdot 0,4^2 = 0,16\ кг \cdot м^2;$$

– цилиндра

$$J_{ц} = J_0 + m_{ц}d_2^2 = \frac{m_{ц}R_{ц}^2}{2} + m_{ц}(R_{об} + R_{ц})^2,$$

$$J_{ц} = \frac{2 \cdot 0,1^2}{2} + 2 \cdot (0,4 + 0,2)^2 = 0,73\ кг \cdot м^2.$$

Окончательно, момент инерции системы тел EDA относительно оси $O'O'$ равен:

$$J = J_{ст} + J_{об} + J_{ц},$$

$$J = 0,79 + 0,16 + 0,73 = 1,68\ кг \cdot м^2.$$

ОТВЕТ: $J = 1,68\ кг \cdot м^2$

Задание 4. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Краткая теория

Гармоническими называют колебания, при которых изменение некоторой величины x происходит по закону синуса или косинуса:

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad \text{или} \qquad x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Рассмотрим материальную точку, совершающую гармонические колебания около положения равновесия. В этом случае:

x – смещение – отклонение колеблющейся точки от положения равновесия в момент времени t;

A – амплитуда колебаний – максимальное смещение от положения равновесия;

$\omega_0 t + \varphi_0$ – фаза колебаний – величина, определяющая положение колеблющейся точки в любой момент времени t;

φ_0 – начальная фаза колебаний, определяет значение x в начальный момент времени ($t = 0$);

ω_0 – циклическая частота, равна числу колебаний за время 2π (единиц времени),

$$\omega_0 = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T};$$

T – период – это время, за которое совершается одно полное колебание;

ν – частота, равна числу колебаний, совершаемых за единицу времени.

Связь между частотой и периодом:

$$T = \frac{1}{\nu}.$$

Скорость при гармонических (синусоидальных) колебаниях определяется как первая производная смещения по времени:

$$\upsilon(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Максимальное значение скорости:

$$\upsilon_{max} = A\omega_0.$$

Ускорение при гармонических колебаниях:

$$a(t) = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Знак минус в этом выражении означает, что ускорение всегда имеет знак, противоположный знаку смещения, и, следовательно, по второму закону Ньютона, сила, заставляющая тело совершать гармонические колебания, направлена всегда в сторону положения равновесия ($x = 0$).

Максимальное значение ускорения:

$$a_{\max} = A\omega_0^2 .$$

Математический маятник – материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити (рис. 1).

В случае малых колебаний (при углах отклонения α не более $15^0 \div 20^0$) математический маятник совершает гармонические колебания. Колебания маятника при больших углах отклонения не являются гармоническими.

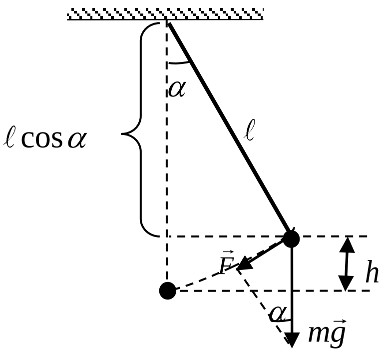

Рис. 1

При отклонении маятника от положения равновесия на тело действует возвращающая сила, которая является тангенциальной составляющей силы тяжести. Модуль возвращающей силы:

$$|F| = mg\sin\alpha .$$

Период собственных колебаний математического маятника (формула Гюйгенса):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} .$$

Циклическая частота собственных колебаний математического маятника:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} .$$

Кинетическая энергия колебаний математического маятника равна

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2} .$$

Максимальное значение кинетической энергии:

$$E_{к\max} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} .$$

Потенциальная энергия математического маятника, совершающего гармонические колебания в поле тяготения, равна

$$E_p = mgh = mg\ell\left(1-\cos\alpha\right) = mg\ell\cdot 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

При малых углах отклонения, если угол измеряется в радианах, справедливо утверждение:

$$\sin\alpha \approx \alpha .$$

Сам угол в радианах равен отношению длины дуги к радиусу окружности (длине нити ℓ), а длина дуги приблизительно равна смещению x:

$$\alpha \approx \frac{x}{\ell}.$$

Тогда потенциальная энергия равна

$$E_p = \frac{mgx^2}{2\ell} = \frac{mgA^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0)}{2\ell}.$$

Максимальное значение потенциальной энергии:

$$E_{p\max} = \frac{mgA^2}{2\ell}.$$

Полная энергия колебаний математического маятника равна:

$$E = E_к + E_p .$$

Условие задания

Математический маятник массой $m = 100\ г$ и длиной ℓ совершает гармонические колебания, описываемые уравнением, приведённым в табл. 1.

Используя уравнение гармонического колебания найти:

1) амплитуду A;
2) фазу φ;
3) начальную фазу φ_0;
4) циклическую частоту ω_0;
5) длину математического маятника ℓ по известной циклической частоте ω_0 (ускорение свободного падения $g = 10\ м/с^2$);

6) частоту ν;

7) период T;

8) значения смещения x в моменты времени $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$, результаты занести в табл. 2;

9) уравнение изменения скорости со временем $\upsilon(t)$;

10) значение максимальной скорости $\upsilon_{\max}$;

11) значения скорости υ в моменты времени $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$;

12) уравнение изменения ускорения со временем $a(t)$;

13) значение максимального ускорения $a_{\max}$;

14) значения ускорения a в моменты времени $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$;

15) модуль максимальной возвращающей силы $|F_{\max}|$;

16) кинетическую энергию в моменты времени $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$;

17) максимальное значение кинетической энергии $E_{\kappa\max}$;

18) потенциальную энергию в моменты времени $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$;

19) максимальное значение потенциальной энергии $E_{p\max}$;

20) полную механическую энергию E в моменты времени $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$, результаты занести в табл. 2;

21) построить графики зависимости $x(t)$, $\upsilon(t)$, $a(t)$, $E_\kappa(t)$, $E_p(t)$, $E(t)$ расположив оси, как показано на рис. 2.

Таблица 1. Варианты заданий

№	Уравнение гармонического колебания	№	Уравнение гармонического колебания
1	$x = 0,02\sin(\pi t), м$	**18**	$x = 0,03\sin(2\pi t), м$
2	$x = 0,02\sin(4\pi t), м$	**19**	$x = 0,03\cos(4\pi t), м$
3	$x = 0,045\sin(2\pi t), м$	**20**	$x = 0,055\sin(\pi t), м$
4	$x = 0,01\sin(4\pi t), м$	**21**	$x = 0,03\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right), м$
5	$x = 0,05\sin(\pi t), м$	**22**	$x = 0,01\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right), м$
6	$x = 0,03\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), м$	**23**	$x = 0,01\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right), м$
7	$x = 0,06\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right), м$	**24**	$x = 0,05\sin(3\pi t), м$
8	$x = 0,01\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), м$	**25**	$x = 0,014\cos(\pi t), м$
9	$x = 0,02\sin(3\pi t), м$	**26**	$x = 0,043\cos(\pi t), м$
10	$x = 0,01\sin(\pi t), м$	**27**	$x = 0,06\sin(2\pi t), м$
11	$x = 0,08\sin(\pi t), м$	**28**	$x = 0,015\cos(\pi t), м$
12	$x = 0,02\sin(2\pi t), м$	**29**	$x = 0,042\cos(4\pi t), м$
13	$x = 0,05\cos(\pi t), м$	**30**	$x = 0,05\cos(2\pi t), м$
14	$x = 0,025\cos(4\pi t), м$	**31**	$x = 0,01\sin(3\pi t), м$
15	$x = 0,04\cos(2\pi t), м$	**32**	$x = 0,02\sin(\pi t), м$
16	$x = 0,025\sin(2\pi t), м$	**33**	$x = 0,03\sin(\pi t), м$
17	$x = 0,025\sin(\pi t), м$	**34**	$x = 0,04\sin(2\pi t), м$

Таблица 2. Данные для построения графиков $x(t)$, $\upsilon(t)$, $a(t)$, $E_к(t)$, $E_p(t)$

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
$x, м$					
$\upsilon, м/с$					
$a, м/с^2$					
$E_к$, Дж					
E_p, Дж					
E, Дж					

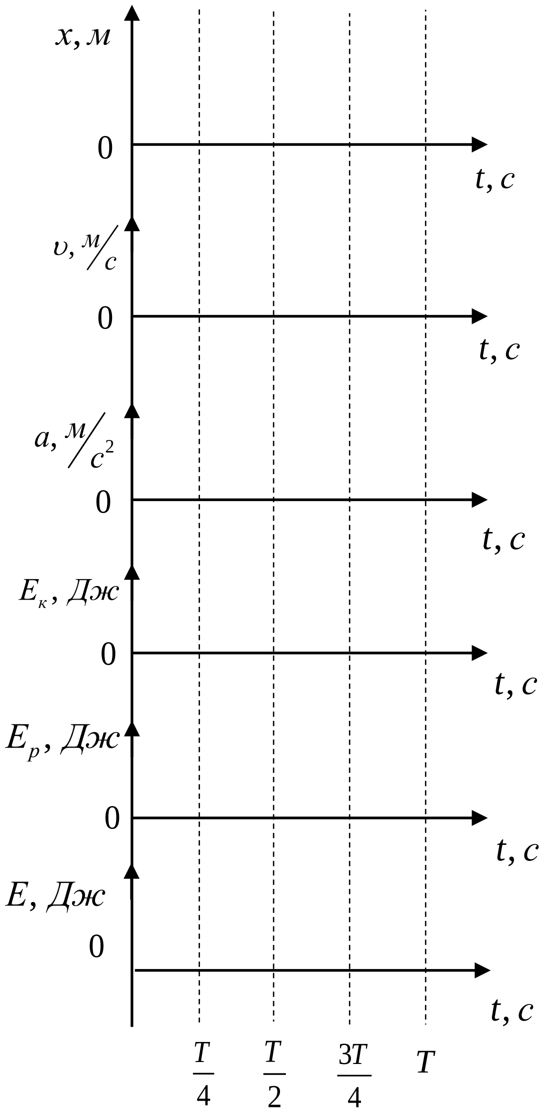

Рис. 2

Пример выполнения

Математический маятник массой $m = 2\,кг$ и длиной ℓ совершает гармонические колебания, описываемые уравнением $x = 0,2\cos(\pi t),\,м$.

1) амплитуда $A = 0,2\,м$;

2) фаза $\varphi = \pi t,\ рад$;

3) начальная фаза $\varphi_0 = 0$;

4) циклическая частота $\omega_0 = \pi$;

5) длина математического маятника: $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad \Rightarrow \ \ell = \frac{g}{\omega_0^2}$, $\ell = \frac{10}{3{,}14^2} = 1{,}014\ \textit{м}$;

6) частота $\nu = \frac{\omega_0}{2\pi}$, $\nu = \frac{\pi}{2\pi} = 0{,}5\ \textit{Гц}$;

7) период $T = \frac{1}{\nu}$, $T = \frac{1}{0{,}5} = 2\,\textit{с}$;

8) при $t = 0$, $x = 0{,}2\cos(\omega_0 \cdot 0) = 0{,}2 \cdot 1 = 0{,}2\ \textit{м}$,

при $t = \frac{T}{4}$, $x = 0{,}2\cos\left(\omega_0 \cdot \frac{T}{4}\right) = 0{,}2\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) = 0{,}2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$,

при $t = \frac{T}{2}$, $x = 0{,}2\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) = -0{,}2\ \textit{м}$,

при $t = \frac{3T}{4}$, $x = 0{,}2\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{3T}{4}\right) = 0$,

при $t = T$, $x = 0{,}2\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot T\right) = 0{,}2\ \textit{м}$.

Результаты занести в табл. 2.

9) уравнение изменения скорости со временем $\upsilon(t) = \frac{dx}{dt} = 0{,}2\pi\cos(\pi t),\ {}^{\textit{м}}\!/\!_{\textit{с}}$;

10) значение максимальной скорости $\upsilon_{\max} = A\omega_0 = 0{,}2 \cdot 3{,}14 = 0{,}628\ {}^{\textit{м}}\!/\!_{\textit{с}}$; и т. Д.

21) на рис. 3 приведём пример построения графика зависимости $x(t)$

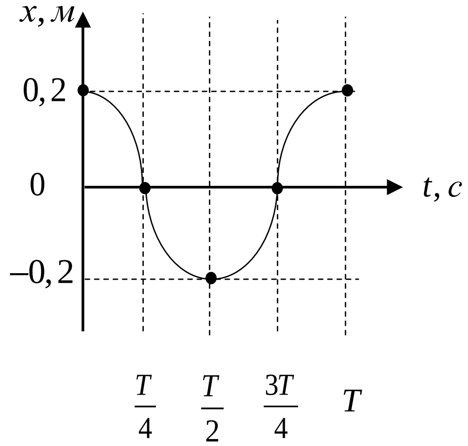

Рис. 3